

Классическая механика

Механика - наука о движении тел.

Основные понятия механики:

1. Материальная точка - тело, размером которого можно пренебречь.
2. (Абсолютно) твёрдое тело - система материальных точек, расстояния между любой парой которых всегда остаются неизменными. Тело, размер и форма которого не меняются.
3. Сплошная среда - среда, в которой вещество распределено непрерывно.

Кинематика материальной точки

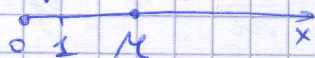
Кинематика - раздел механики, изучающий движение тел без рассмотрения причин этого движения.
Задача кинематики - математически описать движение тела.

Чтобы измерить расстояние, нужно сравнить его с длиной некоторого тела, принятого за эталон.

В системе СИ единица измерения длины - метр. По определению это расстояние, которое проходит свет в вакууме приблизительно за $\frac{1}{299\,792\,458}$ с. (XIII - расстояние)

Чтобы измерить промежуток времени, нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон.

В системе СИ время измеряется в секундах. Секунда - это продолжительность приблизительно 10^{10} колебаний электрона в атоме цезия. (IX - время)



$I \text{ } x = x(t)$ - закон движения точки по прямой.

Ось координат - прямая линия, на которой выбрано начало отсчёта, положительное направление и единица измерения, длины.

II Движение точки на плоскости

$$x(t); y(t)$$

пара функций $x(t), y(t)$ - закон движения точки на плоскости.

III Движение точки в пространстве

$$x(t); y(t); z(t) - \text{закон движения точки в пространстве}$$

Радиус-вектор точки - это вектор, проведенный от начала отсчета к данной материальной точке $\vec{r}; \vec{r}(t)$

Орты декартовой системы координат - единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей

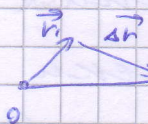
$$|\vec{i}| = 1 = |\vec{j}| = |\vec{k}|$$

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad [\text{м}]$$

Перемещение - разность радиус-векторов точки, взятых в два разных момента времени.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1; \vec{r}_1 = \vec{r}(t_1); \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$$



Длительность - разность моментов времени $\Delta t = t_2 - t_1$ [с]

Скорость - отношение перемещения точки к его длительности в пределе, когда длительность стремится к нулю.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Скорость - это производная радиус-вектора точки по времени.

Декартова компонента скорости - величины, средние формулы:

$$\vec{v} = \vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y + \vec{k} \cdot v_z$$

$$v_x, v_y, v_z \in \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$$

Модуль скорости: $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$

Ускорение - производная скорости точки по времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Декартовы компоненты ускорения.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z) = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

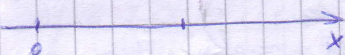
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

$$a_z = \ddot{z}$$

$$\left[\frac{dx}{c^2} \right]$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \left[\frac{M}{c^2} \right]$$

Пример: равноускоренное движение точки во времени.



$$a_x = \text{const}$$

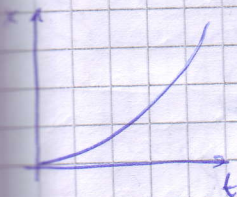
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x dt$$

$$v_x(t) = a_x \cdot t$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a_x \cdot t$$

$$dx = a_x \cdot t dt$$

$$x(t) = a_x \frac{t^2}{2}$$



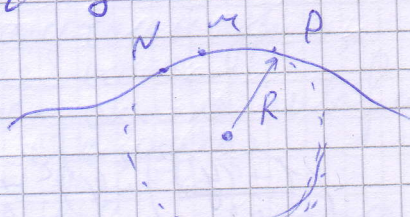
Измерение ускорения

$$a_x = \frac{dx}{t^2}$$

Свободное падение



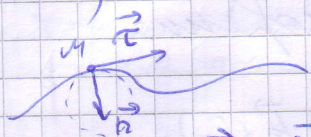
$$x \sim t^2, a_x = 9,8 \frac{M}{c^2} \equiv g$$



IV Криволинейное движение

Круг криволинейной кривой в точке - круг, проходящий через данную точку M кривой и касающийся ее в точке M. N и P кривой, лежащие по разные стороны от M, в пределе $N \rightarrow M$; $P \rightarrow M$.

Нормальное (и тангенциальное) ускорение — это составляющая ускорения точки параллельная вектору скорости (и перпендикулярная вектору скорости)



$$|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = 1$$

$$\vec{a} = \vec{\tau} \cdot a_\tau + \vec{n} \cdot a_n$$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\tau} \cdot v$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} v) = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$



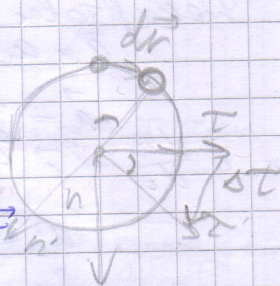
$$d\vec{\tau} = \vec{n} \frac{dr}{R}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{n} \frac{1}{R} \frac{dr}{dt} = \vec{n} \cdot \frac{v}{R}$$

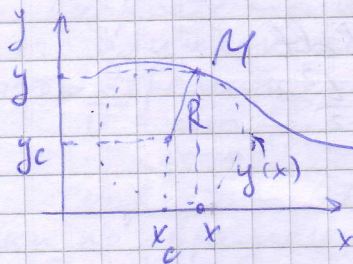
$$\vec{a} = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \vec{n} \frac{v^2}{R}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



Вычисление радиуса кривизны



$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

$$f(x) \left(\frac{d}{dx} (2(x - x_c) + 2(y - y_c)(y')) \right) = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx} \right) 1 + (y - y_c) y'' + (y')^2 = 0$$

$$(y - y_c) = - \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

$$(x - x_c) = - \frac{1 + (y')^2}{y''} \cdot y'$$

$$\left(\frac{1 + (y')^2}{y''} \right)^2 \cdot (y')^2 + \left(\frac{1 + (y')^2}{y''} \right)^2 = R^2$$

$$\frac{(1 + (y')^2)^3}{(y'')^3} = R^2 \quad (*) R = \frac{1 + (y')^2}{|y''|}^{3/2}$$

$$1) y = f \quad (\text{в точке } M)$$

$$2) y' = f'$$

$$3) y'' = f''$$

$\Rightarrow$ в * можно записать y на f

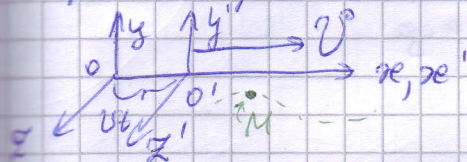
§2 принцип относительности. Преобразова- ния Галилея и Лоренца

Принцип относительности Галилея
никакими мех. опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли она в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется

математическая формулировка:

Ур-я, описывающие законы физики, должны инвариантно относительно преобразований, описывающих переход от неподвижной с.о. к системе движущейся равномерно и прямолинейно

Рассмотрим неподвижную с.о. x, y, z и подвижную x', y', z' , V - ее скорость



$$x = x' + Vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

преобразование Галилея

Следствие - правило сложения скоростей:

$$x = x' + Vt \Rightarrow v_x = v_{x'} + V$$

$$v_y = v_{y'}$$

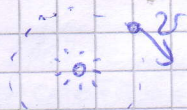
$$v_z = v_{z'}$$

$$\vec{v}_{обс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{с.о.}$$

В середине XIX века были попытки ур-я, описывающие св-ва эл-маг-ного поля (ур-я Максвелла) okazaдось, они не инвариантны относительно преобразований Галилея. Возник вопрос: где ошибка?

Решили проверить правило сложения скоростей для световых волн

Майкельсон предложил в качестве неподвижной с.о. использовать Землю, вращающуюся вокруг Солнца. (30 км/с)

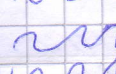


$$v = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

Чтобы провести измерения предложим использовать интерференцию света
(интерференция - взаимная компенсация действия световых волн в некоторых точках пространства, (свет+свет=темнота))

приходят в одной точке:  свет

приходят в противофазе:  темнота
($\sim 10^{-15} \text{ с}$)

если у одной волны скорость меньше или больше, это начало одной "подиним"
предложили измерить ~~эту~~ абсолютную скорость в разных направлениях.

продолжая и поперечная скорости света - скорости света относительно земли, измеренные параллельно направлению её движения и перпендикулярно ему.

$$v_x = v'_x + v; \quad v_y = v'_y$$

↑
скорость света от источника

$$v_x^2 + v_y^2 = c^2$$

Эти формулы вытекают из гипотезы неподвижного эфира

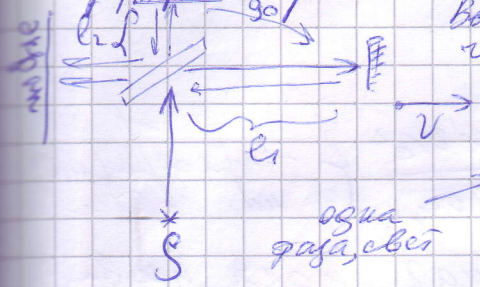
$$\rightarrow v_{\parallel} = |v'_x| \text{ если } v'_y = 0$$

$$\text{продольн. } v_{\parallel} = c \pm v$$

$$\text{поперечн. } \rightarrow v_{\perp} = |v'_y|, \text{ если } v'_x = 0$$

$$v_{\perp} = \sqrt{c^2 - v^2} \neq v_{\parallel}$$

Интерферометр Майкельсона:



Выведем такие параметры, чтоб получить противоразу

$$\frac{l_1}{c+v} + \frac{l_1}{c-v} = \frac{l_2 \cdot 2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Далее - поворачиваем на 90° и тогда поведем темпноты:

$$\frac{l_2}{c+v} + \frac{l_2}{c-v} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{T}{2}$$

T - период колебания, $T = \frac{1}{\nu}$, λ - длина св. волны

$$l_1, l_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{c}{\nu} \right)^2 \quad (\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м})$$

прибор уменьшили ($\lambda = 1 \text{ м}$), поставили в вакуум со ртутью

Выяснили, что изменение интерференции происходит не при каких-либо поворотах прибора $\Rightarrow$ гипотеза неподвижного эфира - ошибочна.

Возникла идея о том, что c не зависит от того, в какой системе свет распространяется (принцип постоянства скорости света). c не зависит от того, как движется. (покой или движение) она всегда $\Rightarrow c_{\text{эфир}} = c_{\text{эфир}} = c$

Следствие: (координата, движение фронтов свет. волны)

$$x = ct$$

$$x' = ct'$$

t' - время отсчитываемое по часам "неподвижной" системы

$$x = x' \Rightarrow t + t' \Rightarrow \text{относительность времени}$$

$$x, y, z, t \rightarrow x', y', z', t'$$

Сначала прибор Галилея:

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \\ t &= t' + v x' / c^2 \quad (?) \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

но:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t - vx/c^2 \end{cases} \quad (?)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \text{ - преобразования Лоренца}$$

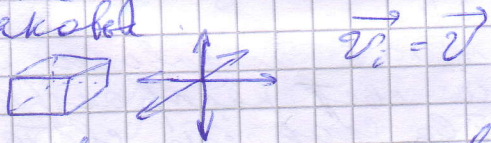
Оказалось, что ур-я Эйнштейна инвариантны отн. преобразования Лоренца. Было замечено, что движение связано со временем.

Принцип относительности Эйнштейна.
Уравнения электр. и магн. законов должны быть инвариантны отн. преобр. Лоренца.

§3

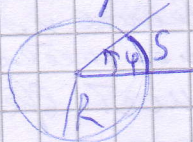
Кинематика твёрдого тела.

а) поступательное движение твёрдого тела - движение при котором ориентация тела в пространстве остаётся постоянной (при таком движении скорости движения всех точек тела одинаковы).



б) вращение тела вокруг неподвижной оси

Закон движения можно характеризовать углом поворота относительно некоторого начального положения.



Измерение угла в радианах:

Радиус окр. с центром в вершине угла. Внутр. угол - дуга. Угол в радианах

$$\varphi = \frac{S}{R} \Rightarrow S = R\varphi$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dt} \quad \text{при малых } t; S = R\varphi \Rightarrow$$

$$v = R \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{d\varphi}{dt} - \text{угловая скорость вращения}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right] \equiv \dot{\varphi}$$

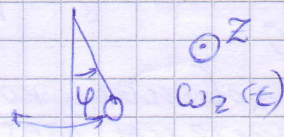
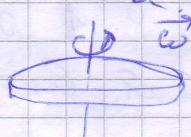
при вращении вокруг неподвижной оси все точки тела движутся по окружностям, а центры всех окружностей лежат на одной прямой — оси вращения.

$\varphi = \varphi(t)$ — закон движения, если выбрано положительное направление поворота уга.

Ось вращения — прямая линия, на которой лежат неподвижные точки тела. Выберем направление оси вращения, связав его с направлением оси отсчета угла поворота по правилу правого винта.

Вектор угловой скорости — по вектор, направленный вдоль оси вращения тела по правилу правого винта и равный по модулю производной угла поворота тела по времени.

$\vec{\omega}$



В движение тела с одной неподвижной точкой.

теорема Гюйса:

Движение тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени можно рассматривать, как движение вокруг некоторой неподвижной оси, проходящей через точку закрепления (мгновенной оси вращения).

Мгновенная ось вращения — прямая, на которой лежат неподвижные в данный момент точки тела.

каждый вектор скорости произвольной точки тела



$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$\text{так } v = \omega r \sin \alpha = v_{\perp}$$

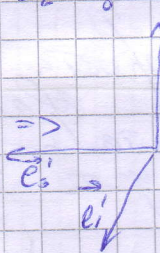
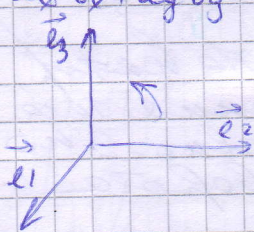
$$v = \omega r_{\perp}$$

как описать положение тела в пространстве?

матрица S поворота тела - матрица составленная из скалярных произведений ортов двух координатных систем (неподвижной системы и системы тела).

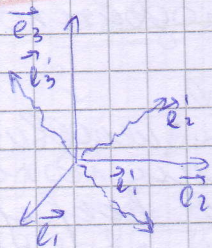
$$S_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}'_j) \quad i, j = 1, 2, 3$$

Скалярное произведение векторов - произведение модулей векторов, умноженное на cos угла между ними. $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (декарт. координаты)



$$S = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \vec{e}'_1 & \vec{e}_1 \vec{e}'_2 & \vec{e}_1 \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_2 \vec{e}'_1 & \vec{e}_2 \vec{e}'_2 & \vec{e}_2 \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_3 \vec{e}'_1 & \vec{e}_3 \vec{e}'_2 & \vec{e}_3 \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Преобразование компонент вектора при повороте системы отсчета.



$$\vec{r} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3$$

$$\vec{r} = \vec{e}'_1 x'_1 + \vec{e}'_2 x'_2 + \vec{e}'_3 x'_3$$

умножим скалярно на $\vec{e}_i$:

$$(\vec{r}, \vec{e}_i) = x_i = x'_1 (\vec{e}_i, \vec{e}'_1) + x'_2 (\vec{e}_i, \vec{e}'_2) + x'_3 (\vec{e}_i, \vec{e}'_3)$$

$$\Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} x'_j, \quad i = 1, 2, 3$$

Двойной поворот:

$$x_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} x_j'$$

$$x_j' = \sum_{k=1}^3 B_{jk} x_k''$$

$$x_i = \sum_j A_{ij} \sum_k B_{jk} x_k'' = \sum_{k=1}^3 x_k'' \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{jk} = \sum_{k=1}^3 C_{ik} x_k''$$

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{jk}, \quad i, k = 1, 2, 3$$

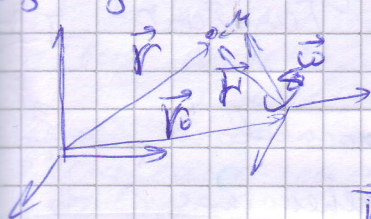
$$\vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

§4

Кинематика вращающихся систем отсчёта

Проблема: какие особенности приобретают физические законы, если рассматривать их в системе отсчёта, связанной с вращающимся телом?

Как связаны между собой кинематические характеристики точки в неподвижной и вращающейся системах?



$$\vec{v}_0 + \vec{v}' = \vec{v}$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'$$

$$\vec{r}' = \vec{e}_1' x_1' + \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_3' x_3'$$

$$d\vec{r}' = \vec{e}_1' dx_1' + \vec{e}_2' dx_2' + \vec{e}_3' dx_3' +$$

изменение положения точки по отношению к неподв. сист.

$$+ x_1' d\vec{e}_1' + x_2' d\vec{e}_2' + x_3' d\vec{e}_3'$$

изменение полож. поств. сист. по отн. к неподв.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\S 3)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt$$

По этой формуле можно найти выражение любого вектора, жестко связанного с вращающейся системой отсчёта.

$$d\vec{e}_1 = (\vec{\omega} \times \vec{e}_1) dt, \quad d\vec{e}_2 = (\vec{\omega} \times \vec{e}_2) dt, \quad d\vec{e}_3 = (\vec{\omega} \times \vec{e}_3) dt$$

$$x_i d\vec{e}_i' + \vec{x}_i' d\vec{e}_i' + \vec{x}_i' d\vec{e}_i' = (\vec{\omega}, \vec{r}) dt$$

$$d\vec{r}' = d'\vec{r}' + (\vec{\omega}, \vec{r}') dt$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' \quad : dt$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \underbrace{(\vec{\omega}, \vec{r}')}_{\text{const}}$$

эксперим. нодб.е

эксперим. вращение системы

$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d\vec{v}' + (\vec{\omega}, d\vec{r}') \quad : dt$$

$$d'\vec{v}' = d'\vec{v}' + (\vec{\omega}, \vec{v}') dt$$

$$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d'\vec{v}' + \underbrace{(\vec{\omega}, \vec{v}')}_{\text{const}} dt + \underbrace{(\vec{\omega}, d'\vec{r}')}_{\text{const}} + \underbrace{[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]}_{\text{const}} dt$$

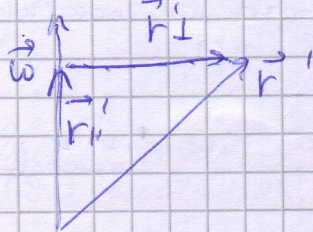
$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k$$

нормальное кориолисово

$$\vec{a}_n = \vec{a}_0 + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] - \text{нормальное}$$

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] - \text{кориолисово}$$



$$\vec{r}' = \vec{r}_{\parallel}' + \vec{r}_{\perp}'$$

$$[\vec{\omega}, \vec{r}'] = [\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}']$$

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}']] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}_{\perp}') = -\vec{r}_{\perp}' \cdot \vec{\omega}^2 = -\omega^2 \vec{r}_{\perp}'$$

$$\vec{a}_n = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}_{\perp}'$$

центростремительное ускорение

Законы Ньютона

I Закон Ньютона:

Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние

II Закон Ньютона:

Произведение массы материальной точки на ускорение равно воздействию на него силе. ($m\vec{a} = \vec{F}$)

III Закон Ньютона:

Действия двух тел друг на друга равны и противоположно направлены. ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$)

Определение:

масса тела - это мера отклика тела на действие силы.

Сила - это мера действия других тел на данное

Измерение силы и массы:

Чтобы измерить любую физическую величину, нужно ввести единицу её измерения. В системе СИ единицей измерения массы является один килограмм.

Килограмм - масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты.

Единица измерения силы - Ньютон

1 Ньютон - сила, вызывающая ускорение 1 м/с^2 у тела массой 1 кг.

Измерение массы:

Чтобы измерить массу, подвешиваем на тело эталонной силой и измеряем ускорение. После этого находим массу по формуле: $m = \frac{|\vec{F}_{эт}|}{|\vec{a}|} = \frac{F_{эт} \cdot t^2}{2F}$

Измерение силы:

Чтобы измерить силу, подвешиваем ею на тело эталонной массы и измеряем ускорение. После этого находим силу по формуле $|\vec{F}| = m \cdot \vec{a}$.

Опытная проверка II закона

F и a - ?

Предсказать, а затем
проверить экспериментально

0,5 кг 2 Н 6 м/с

Есть 2 случая, когда II закон Ньютона теряет силу:

- 1) Тела, движущиеся со скоростями, близкими к скорости света.
- 2) Очень маленькие тела, движущиеся в очень малой области пространства.

III Закон Ньютона свойства сил взаимодействия

- 1) относятся к разным телам
- 2) направлены вдоль одной прямой
- 3) имеют одинаковую природу

Сложение сил:

Если на материальную точку одновременно действуют две силы, то она начинает двигаться так, как если бы действовала одна сила, равная их векторной сумме.

Импульс материальной точки — это произведение массы точки на её скорость.
Скорость измерения импульса $\neq$ мат. точки равна действующей на неё силе.

§ 8

Силы в механике

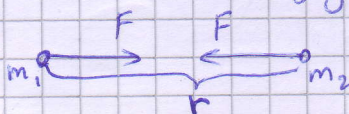
Силы в природе:

- 1) гравит.
 - 2) эласт.
 - 3) силовые
 - 4) слабые
- } внутри атомных ядер

I Гравитационные силы

Закон всемирного тяготения:

Любые две частицы притягиваются друг к другу, силой, пропорциональной их массам, и обратнопропорциональной квадрату расстояния между ними.



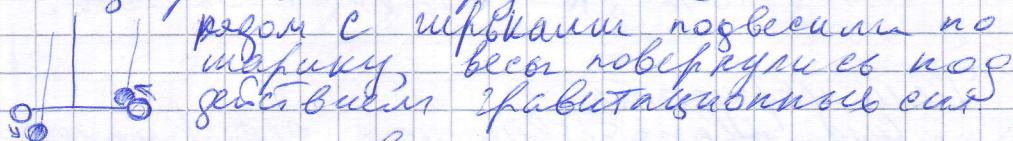
$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G - гравитационная постоянная

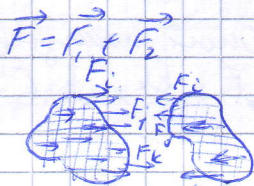
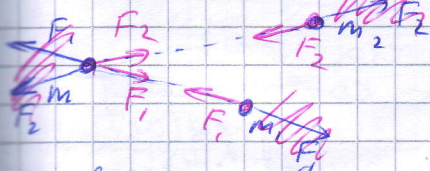
$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

$$G = 6,6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

Измерение гравитационной постоянной:
были изобретены крутильные весы:



Принцип суперпозиции:
каждая пара частиц взаимодействует независимо, как если бы другие частицы не было.



Пример: притяжение точки к шару:



m

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Шар притягивает точку так, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

Пример: взвешивание Земли:



$$F = mg = \frac{M \cdot m \cdot G}{R^2}$$

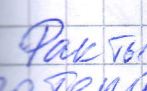
$$\Rightarrow M = \frac{g R^2}{G}$$

$$g \approx 10^{-7} \text{ м/с}^2; \quad G = 6,6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}; \quad R \approx 6400 \cdot 10^3 \text{ м}$$

$$\Rightarrow M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

Измерение радиуса Земли:

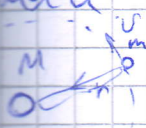
два наблюдателя на Земле смотрят на далекую звезду (лучи практически параллельны)



$$R = \frac{s}{\alpha}$$

Факты подтверждающие закон всемирного тяготения:

1) одинаковое ускорение свободного падения для всех тел близ поверхности Земли



2) период обращения Луны:

$$\frac{mv^2}{r} = G \cdot \frac{Mm}{r^2} \quad T = \frac{2\pi r}{v}$$

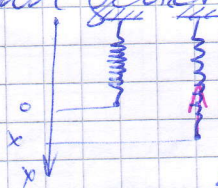
$$\frac{v^2}{r^2} = G \frac{M}{r^3} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{MG}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{gR^2}} \approx 1 \text{ мес.}$$

$$mg = \frac{mMG}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2; R = 6400 \text{ км}; r = 384000 \text{ км}$$

Сила упругости

Сила, отвечающая деформации упругих тел.
Упругое тело — тело, которое восстанавливает свою форму после прекращения действия сил.



Опыт показывает, что: $F \propto x$

$F = kx$, $k [Н/м]$ — коэффициент упругости

Закон Гука (не фундаментальный закон, а приближенное соотношение, верное при не слишком больших деформациях)

В векторном виде: (проеция)

$$F_x = -kx$$

Силы трения

Силы, отвечающие относительному перемещению соприкасающихся тел.

Виды трения:

- 1) сухое трение + трение покоя + трение скольжения
- 2) вязкое трение

Трение покоя:

не движется

$$F_{\text{тр}} \leftarrow \boxed{\text{---}} \xrightarrow{F} \Rightarrow F + F_{\text{тр}} = 0 \Rightarrow F_{\text{тр}} = -F$$

Из опыта известно, что сила трения покоя ограничена сверху некоторой величиной.

$$F_{\text{тр}} \leq F_{\text{max}}$$

Сила нормального давления — составляющая силы взаимодействия соприкасающихся тел, перпендикулярная поверхности соприкосновения. (N)

Опыт показывает: $F_{\text{max}} \sim N$.

$F_{\text{max}} = \mu N$, μ - коэффициент трения,

безразмерная величина $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$
 R - сила реакции, $R = N + F_{\text{тр}}$

$\mu = \tan \alpha$ при таком наклоне,
когда тело начинает соскальзывать.

Трение скольжения - сила трения при
качании движения $F_{\text{тр}} = \mu N$ - верно при
не слишком больших N .

Вязкое трение - трение, препятствующее
движению тела в сплошной среде
жидкости:

1) для такого трения нет трения
покоя;

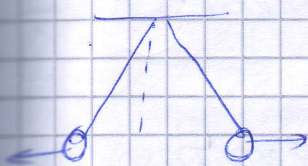
2) сила вязкого трения зависит от
скорости.

$F_{\text{тр}} \sim v$, если v не слишком велика.
 $F_{\text{тр}} = \alpha v$

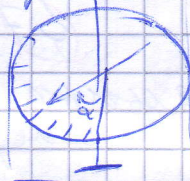
II Электростатические силы

Сила Кулона (из опыта)

Электрический заряд - мера электростатического
взаимодействия тел.



Электрометр



Электрическое поле -
это поле, создаваемое
электрическими зарядами и проявляющее
себя действием на электрические заряды.
Мера электрического поля - напряженность.
(мера действия поля на заряд)
 $E = \frac{F}{q}$ - сила Кулона.

Сила Лоренца

$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, $\vec{B}$; $\vec{B}$ - вектор магнитной
индукции

Вводя эти выражения:

$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, $\vec{B}$ — электромагнитная сила, действующая на точку (Лоренца)
 q — заряд, v — скорость
 E — напряженность, B — индукция

Движение с большими скоростями — релятивистское уравнение движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Уравнение Планка в 1 сев:

3 этапа:
 1) введение сопровождающей с.о. S_1 (система, в которой скорость частицы в данный момент равна нулю). Внеб. закон Плотона:

$$m_0 \vec{a} = \vec{F},$$

$$\vec{F}_1 = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

2) $S_1 \rightarrow S_2$, S_2 — неподвижная система, оси которой параллельны осям S_1 .
 3) $S_2 \rightarrow S$ с произвольным направлением оси (выбрана ось направления движения — то же)

67

Кинематические системы отсчёта

Виды инерции

Инерциальные с.о. — с.о., в которых всякое тело, бесконечно удалённое от других тел, не испытывает ускорения.
Остальные — неинерциальные

S : инерциальная с.о.; S' — неинерц.

S : $m\vec{a} = \vec{F}$

S' : $m\vec{a} + m\vec{a}' - m\vec{a}' = \vec{F}$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m(\vec{a} - \vec{a}')$$

додавальная сила, сила инерции.
Сила инерции — додавальная сила, действующая на материальную точку в неинерциальной с.о. и определяется силой формулой:

$\vec{F}_{ин} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$, где m — масса мат. точки, $\vec{a}$ — ускорение отн. инерц. сист., $\vec{a}'$ — отн. данной неинерц. сист.

б4: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_k$
 $\vec{a}_n = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}_I$, $\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Сила инерции:

$$\vec{F}_{ин} = \underbrace{-m\vec{a}_0}_{\vec{F}_n \text{ переносная}} + \underbrace{m\omega^2 \vec{r}_I}_{\vec{F}_y \text{ центробежная}} - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\vec{F}_k \text{ кориолисова}}$$

$$\vec{F}_n = -m\vec{a}_0 ; \vec{F}_y = m\omega^2 \vec{r}_I ; \vec{F}_k = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Уточнение понятия массы:
Измерение массы можно проводить при скоростях, значительно меньших скорости света

Свойства силы инерции:

• эти силы отличны от нуля только для наблюдателя, связанного с неинерциальной системой отсчета
 • нельзя указать тело, со стороны которого приложена сила инерции.
 (неподчинение III закону Ньютона)

Примеры:

- невесомость — исчезновение веса тела, вызванное ускорением системы отсчета
- перегрузка — увеличение веса тела, вызванное ускорением системы отсчета
- центрифуга — быстро вращающееся тело с большой центростремительной силой

Импульсы системы частиц. Движение центра масс.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}]$$

Импульс системы частиц — сумма импульсов отдельных частиц системы.

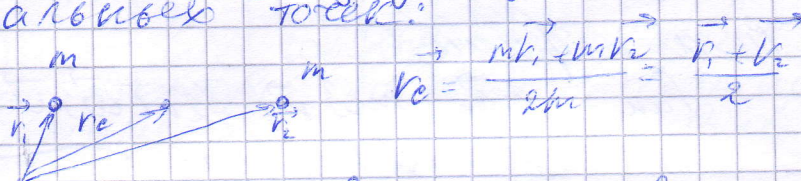
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Центр масс системы частиц — это точка, радиус-вектор которой определяется формулой:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i; \quad m = \sum_i m_i$$

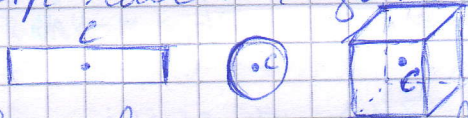
Пример:

система из двух одинаковых материальных точек:



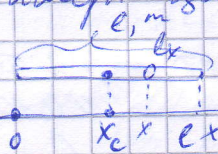
$$\vec{r}_c = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{2m} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

Для любого симметричного однородного тела центр масс находится в геометрическом центре.



Каким образом применить это правило для систем, состоящих из материальных точек?

Пример: центр масс стержня



Найдем проекцию центра масс на ось x:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i$$

$dm = dx \cdot \frac{m}{l}$ — масса dx

$$x_c = \frac{1}{m} \int_0^l x dm = \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{l} \cdot \int_0^l x dx = \frac{l}{2}$$

Скорость и ускорение центра масс

$$\vec{v}_c = \vec{v}_0; \quad \vec{a}_c = \vec{a}_0$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Отсюда следует, что импульс механической системы равен произведению массы системы на вектор скорости центра масс.

$$\vec{p} = m \vec{v}_c$$

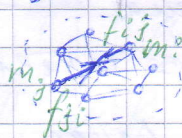
Импульс системы таков, как если бы вся ее масса находилась в центре.

Закон движения центра масс

Введем понятие внутренних и внешних сил для системы частиц.

Внутренние силы - силы взаимодействия между частицами данной системы.

По III закону Ньютона $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \Rightarrow$



$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0$ (сумма внутренних сил равна нулю для любых пары частиц системы) $\Rightarrow$

(сумма всех внутренних сил данной системы равна нулю):

$$\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = 0$$

Внешние силы - силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в данную систему.

$\vec{F}_i$ - внешняя сила, действующая на i-тую ~~каждую~~ точку системы.

Уравнение движения для одной из частиц системы:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}$$

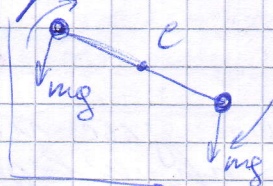
просуммируем такие равенства по всем частицам системы:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = 0$$

$\Rightarrow \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внешн}} = m \vec{a}_c$ / - закон движения центра масс:

Центр масс системы частиц движется так, как если бы в этой точке находилась вся масса системы и к ней были бы приложены все внешние силы.

Пример:



Релятивистский импульс системы частиц — это сумма релятивистских импульсов отдельных частиц системы.

$$\vec{P} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}$$

Закон сохранения импульса (9)

1. Закон изменения импульса системы

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$$

Найдём скорость изменения импульса:

$$\dot{\vec{P}} = \sum m_i \vec{a}_i = m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{\text{внешн.}}$$

$\Rightarrow$ Скорость изменения импульса системы равна сумме внешних сил.

Если сумма внешних сил равна нулю, то импульс механической системы сохраняется — закон сохр. импульса

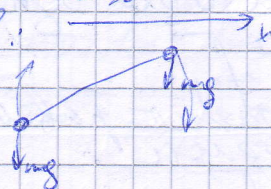
$$\vec{F}_{\text{внешн.}} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

Сохранение импульса относительно осей:

Если существует такая ось, в проекции на которую сумма внешних сил равна нулю, то в направлении этой оси импульс системы сохраняется

$$F_{\text{внешн. } x} = 0 \Rightarrow p_x = \text{const} = \sum_i m_i v_{ix}$$

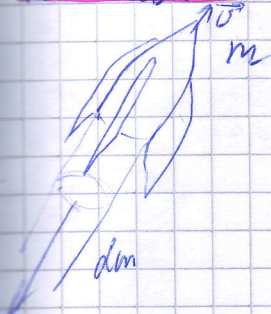
Пример:



$$m v_{1x} + m v_{2x} = \text{const}$$

$$v_{1x} + v_{2x} = \text{const}$$

Ракетное движение.



$$m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u} dm$$

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{c} \quad \text{— абсолютная скорость от гн}$$

↑ ↑
скорости
от гн от ракеты

$$m\vec{v} = m\vec{v} + m d\vec{v} - \vec{v} dm - dm d\vec{v} + \vec{v} dm + \vec{c} dm$$

$$- m d\vec{v} + \underbrace{dm d\vec{v}}_{\rightarrow 0} = \vec{c} dm$$

$$m d\vec{v} + \vec{c} dm = 0 \quad | \cdot dt$$

$$m \vec{a} = -\vec{c} \frac{dm}{dt} = \vec{F}_p$$

⇒ реактивная сила $\vec{F}_p = -\vec{c} \frac{dm}{dt}$

$$\mu = \frac{dm}{dt} = m \left[\frac{v}{c} \right] \quad \text{— скорость расхода массы}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_p = -\mu \vec{c}$$

Пример:

ракета "Зенит"

$$\vec{c} \approx 3 \text{ км/с} = 3 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

$$\mu = 10 \text{ тонн/с} = 10^4 \text{ кг/с}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_p = 3 \cdot 10^7 \text{ Н.} \Rightarrow 3000 \text{ тонн — поднимаемая сила}$$

Сколько нужно топлива для вывода блока в 100 тонн на орбиту?

Стартовая масса: →

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \vec{F}_p = -\mu \vec{c}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \vec{c}$$

$$m = m_0 - \mu t$$

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} - \mu \vec{c} \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \vec{c}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{c} = \int_0^t \frac{dt}{(m_0 - \mu t)}$$

$$\frac{v}{c} = - \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = \int_m^{m_0} \frac{dm}{m} = \ln \left(\frac{m_0}{m} \right)$$

$$\ln \left(\frac{m_0}{m} \right) = \frac{v}{c}$$

$$\frac{m_0}{m} = e^{v/c}$$

конечная скорость.

$$m_0 = m e^{v/c}$$

старая масса конечная масса

$$0.3 \text{ км/с} ; 1.8 \text{ км/с}$$

$$m_0 \approx 20 \text{ т}$$

$$m_0 \approx 1000 \text{ тонн, или } m = 100 \text{ тонн}$$

Пример:

фотонный двигатель.

$$\vec{F}_p = \frac{p}{c} \leftarrow \text{мощность света}$$

$$p = \vec{F}_p c, \quad \vec{F}_p = 1 \text{ Н}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$\rightarrow p = 3 \cdot 10^8 \text{ Вт.}$$

Закон сохранения импульса в теории относительности.

Если сумма внешних сил равна нулю, то релятивистский импульс системы сохраняется:

$$\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const}$$

Работа и потенциальная энергия.

Определение.

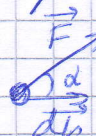
Элементарная работа — это скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы.

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = \vec{F} d\vec{r}$$

Работа — сумма элементарных работ

$$A = \int dA = \int \vec{F} d\vec{r}; [A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж.}$$

Работа - это работа, которую совершает сила в один пункт при перемещении точки приложения силы на 1 метр в направлении действия силы.

$$\vec{F} \quad (\vec{F}, d\vec{r}) = F \cdot dr \cdot \cos \alpha = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$


Потенциальная сила - это сила, работа которой равна нулю при перемещении точки приложения силы по любому замкнутому контуру.

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Примеры потенциальной сил:

- сила тяжести
- сила упругости
- сила Кулона

Примеры непотенциальной сил:

сила трения.

Рассмотрим контур:



Элементарная потенциальная энергия - это элементарная работа потенциальной силы, взятая со знаком "-".

$$d\Pi = -dA_n = -\vec{F} d\vec{r}$$

Потенциальная энергия - сумма элементарных потенциальных энергий.

$$\Pi = \int d\Pi [Dm]$$

$$\Pi = - \int_{r_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = \Pi(\vec{r} - r_0)$$

Здесь r_0 обозначает точку, выбранную за начало отсчёта потенциальной энергии.

Связь силы и потенциальной энергии

$$d\Pi = -\vec{F} d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$

$$= \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz$$

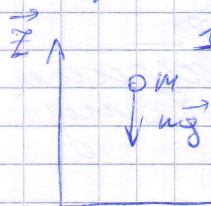
$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

$\vec{F} = -\left(\vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)$ - градиент
потенциальной энергии Π

$$\vec{F} = - \operatorname{grad} \Pi = -\left(\vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)$$

Примеры

1. Сила тяжести.



$$d\Pi = -\vec{F} d\vec{r} = -mg dz = d\Pi$$

$$\Pi = \int d\Pi = mg \int_0^z dz = mgz$$

Потенциальная энергия тела в поле
силы тяжести

Потенциальная энергия системы частиц -
сумма потенциальных энергий отдельных
частей системы.

$$\Pi = \sum \Pi_i; \Pi_i = m_i g z_i$$

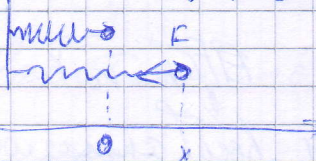
$$\Pi = g \sum m_i z_i = g m z_c$$

(Потенциальная энергия тела в одно-
родном поле тяжести такова, как если
бы вся его масса находилась в одной
точке - центре масс)

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{r}_i$$

$$z_c = \frac{1}{m} \sum m_i z_i$$

2. Сила упругости.

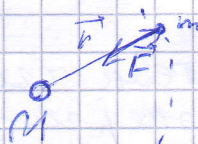


$$F_x = -kx$$

$$d\Pi = -\vec{F} d\vec{r} = -F_x dx = kx dx$$

$$\Pi = \int d\Pi = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}$$

3. Центральное силовое поле - это поле силы, направленной всегда в сторону одного и того же центра, называемого силовым центром.



$$dW = - \vec{F} d\vec{r}$$

$$\vec{F} = - F \cdot \frac{\vec{r}}{r} = - G \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow$$

$$dW = \frac{F}{r} \vec{r} d\vec{r}$$

$$\vec{r} d\vec{r} = x dx + y dy + z dz =$$

$$= \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr$$

$$\Rightarrow \vec{r} d\vec{r} = r dr$$

$$\Rightarrow dW = F dr$$

$$W = \int_{r_0}^r F dr = G M m \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} \quad \ominus$$

Пусть r_0 - точка, где пот. э.и. = 0

$$\ominus - G M m \int_{r_0}^r d\left(\frac{1}{r}\right) = - G M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \ominus$$

Положим $r_0 = \infty$

$$\ominus - G \frac{Mm}{r}$$

§11 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия материальной точки - величина, определяемая формулой:

$$K = \frac{mv^2}{2} \quad \{Dr\}$$

Закон изменения кинетической энергии

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad | \times d\vec{r}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{v} = \vec{F} d\vec{r}$$

$$m \vec{v} d\vec{v} = dK$$

$$m v dv = dK$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK = dW$$

Приращение кинетической энергии точки равно работе действующей на нее сил (теорема об изменении кинетической энергии)

Кинетическая энергия системы частиц — это сумма кинетических энергий отдельных частиц системы:

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

Примеры:

1. Поступательное движение твердого тела:

$$v_i = v \Rightarrow K = \frac{1}{2} m v^2$$

2. Вращение тела вокруг неподвижной оси:



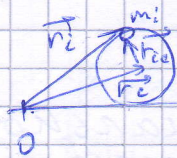
$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2; \quad v_i = \omega r_{i\perp} \quad (\S 3)$$

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

J — момент инерции тела относительно данной оси

$$K = \frac{J \omega^2}{2}$$

3. Пиское движение твердого тела



$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic}) \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_c^2 + 2 \vec{v}_c \cdot \vec{v}_{ic} + \vec{v}_{ic}^2) = \\ &= \frac{m v_c^2}{2} + \vec{v}_c \cdot \sum_i m_i \vec{v}_{ic} + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2 \quad \textcircled{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{v}_{ic} &= \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = \sum_i m_i \vec{v}_i - m \vec{v}_c = \\ &= m \vec{v}_c - m \vec{v}_c = 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{=} \frac{m v_c^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2 \quad \textcircled{=}$$

определяет вращ. вокруг неподвижной оси.

(твое тело вращается — вращается, при котором все точки тела движутся параллельно одной и той же бесконечной плоскости.)

$$\ominus \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

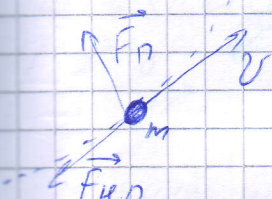
В этой формуле J — момент инерции относительно осей, проходящих через центр масс тела.

§12 Закон сохранения энергии в механике.

Полная механическая энергия системы — это сумма кинетической и потенциальной энергий системы.

$$E = K + U, \quad \sum dW_{\text{св}}$$

Закон изменения полной энергии



$$\begin{aligned} dK &= dA = \vec{F} d\vec{r} = (\vec{F}_n + \vec{F}_{n,||}) d\vec{r} = \\ &= -dU + \vec{F}_{n,||} d\vec{r} \\ d(K+U) &= \vec{F}_{n,||} d\vec{r} = dA_{n,||} \end{aligned}$$

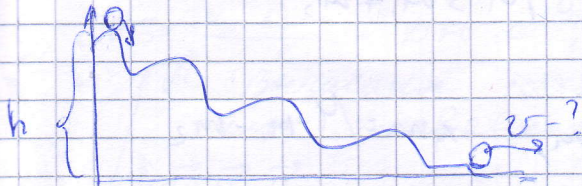
$$dE = dA_{n,||}$$

Изменение полной механической энергии равно работе непотенциальных сил.

Если работа непотенциальных сил равна нулю, то полная механическая энергия системы сохраняется.

Пример:

скачивание санок с горки



$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Закон сохранения энергии в теории относ.

Если сумма импульсов $\vec{p}$ равна 0, то
релятивистская энергия системы сохраняется.
(Если $\vec{p}_{\text{системы}} = 0$, то $E = \sum \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}$)

Этот закон является следствием закона
сохранения импульса и принципа
относительности.

(при том же условии сохраняется импульс:

$$\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}$$

Пример: абсолютно неупругий удар:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(M+V)V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(M+V)c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{2mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 2m \quad (!!!)$$

Таким образом, в теории относительности
возможны взаимные превращения
массы и энергии.

Факты, подтверждающие теорию отн.:

1. Деление ядер урана:

$$M > m_1 + m_2$$
$$E = c^2 \Delta m, \quad \Delta m = M - m_1 - m_2$$

2. Световое давление

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E \cdot \vec{v} = \vec{p} \cdot c^2$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

положим $m=0 \Rightarrow E=pc, v=c$ (фотон)

$$\vec{p} = (E/c) = \dot{E}/c = \frac{P}{c} = \frac{\text{мощность}}{c}$$

$F = P/c$ — сила светового давления

§13.

Момент импульса частицы и системы частиц.

Момент силы

Определение

Моментом импульса частицы называется векторное произведение радиус-вектора частицы и её импульса.

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

Моментом импульса системы частиц называется сумма моментов импульса всех частиц системы.

$$\vec{N}_z = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

Определение.

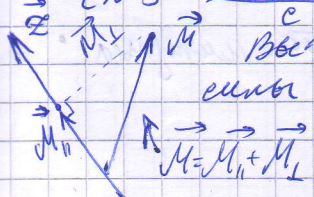
Моментом силы называется векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы.

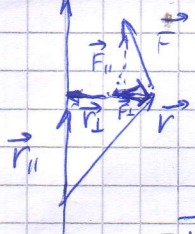
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Моментом относительно оси называется проекция момента на эту ось.

$$[N_z] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \text{Дж} \cdot \text{с}, \quad [M_z] = \text{н} \cdot \text{м}$$

Вычислим составляющую момента силы, направленную параллельно оси Z .





$$\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{||} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{||} + \vec{F}_{\perp}] =$$

$$= [\vec{F}_{||}, \vec{F}_{||}] + [\vec{r}_{||}, \vec{F}_{\perp}] + [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{||}] + [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}] = \vec{M}_{||}$$

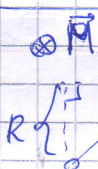
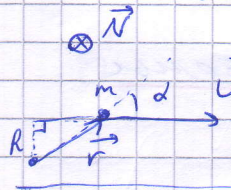
$$\vec{M}_{||} = [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]; \quad \vec{M} = [\vec{r}_{\perp}, m\vec{v}_{\perp}] = \vec{M}_{\perp}$$

$$\vec{N}_x = (\vec{N}_{||}, \vec{e}_x)$$

$$\mathcal{M}_x = (\vec{M}_{||}, \vec{e}_x)$$

момент импульса материальной точки

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}], \quad N = m v r \sin \alpha; \quad N = m v R$$



$$M = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$M = r F \sin \alpha = R F$$

R - плечо силы

Вращение тела вокруг неподвижной оси



$$\vec{N}_i = [\vec{r}_{i\perp}, m_i \vec{v}_i]$$

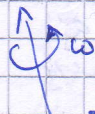
$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}] \quad (\text{§3})$$

$$\vec{N}_{||} = \sum_i M_i [\vec{r}_{i\perp}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]] =$$

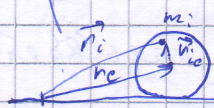
$$= \sum_i m_i (\vec{\omega} r_{i\perp}^2 - \underbrace{\vec{r}_{i\perp} (\vec{r}_{i\perp}, \vec{\omega})}_{=0, \vec{r}_{i\perp} \perp \vec{\omega}})$$

$$\rightarrow \vec{N}_{||} = \vec{\omega} \left(\sum m_i r_{i\perp}^2 \right) \leftarrow \text{момент инерции тела}$$

$$\vec{N}_{||} = J \vec{\omega}; \quad N_x = J \omega_x; \quad \omega_z = 0$$



Плоское движение твёрдого тела



$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i; \quad m = \sum_i m_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

Подставляем в определение момента импульса:

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

$$\vec{N} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i, \vec{v}_i] = \sum_i [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] + [\vec{r}_i \times \sum_i m_i \vec{v}_i] + [\sum_i m_i \vec{v}_i, \vec{v}_i] + \sum_i [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] \quad \text{②}$$

$$\textcircled{*} : \sum_i m_i \vec{v}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{v}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i m_i \vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = m \vec{r}_c \times \vec{v}_c = 0$$

$$\textcircled{=} [\vec{r}_c, m \vec{v}_c] + \sum_i [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}$$

$$\vec{N}_{oc} = \vec{N}_c + \vec{N}_{oc}$$

$$\vec{N}_{oc} = [\vec{r}_c \times m \vec{v}_c] ; \vec{N}_{oc} = \mathcal{I} \vec{\omega} \quad (\mathcal{I} = \mathcal{I}_c)$$

$$\vec{N}_{oc} = [\vec{r}_c \times m \vec{v}_c] + \mathcal{I} \vec{\omega}$$

§14

Закон сохранения момента импульса

Каждый закон изменения:

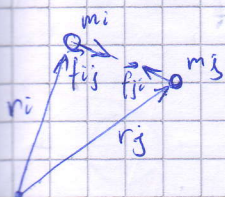
$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \dot{\vec{N}}$$

Скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту действующих на нее сил.

Теорема моментов для системы частиц



$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} \\ \vec{N} &= \sum_i [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] \\ \dot{\vec{N}} &= \sum_i [\dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i] + \sum_i [\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i] \\ \dot{\vec{N}} &= \vec{M}_{внешн.} + \vec{M}_{внутр} \end{aligned}$$

Каждым суммарный момент внутренних сил для отдельной пары частей системы:

$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}] =$$

$$= [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{F}_{ij}] = 0 \Rightarrow \text{суммарный момент внутренних сил равен нулю для всей системы}$$

$\Rightarrow$ скорость изменения момента сил системы равен сумме моментов внешних сил.

Если сумма моментов внешних сил равна нулю, то момент импульса системы сохраняется.

$$(\vec{M}_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \text{const})$$

Закон сохранения момента сил относительно оси.

Если существует такая ось, относительно которой сумма моментов внешних сил равна нулю, то относительно этой оси момент импульса системы сохраняется.

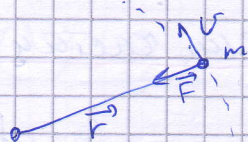
$$(\vec{M}_{\text{вн}z} = 0 \Rightarrow N_z = \text{const}; N_z = M_{\text{вн}z}).$$

§15
Материальная точка в центральном поле.
Законы Кеплера

1° Планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в общем фокусе которых находится Солнце.

2° За равные промежутки времени радиус-вектор планеты описывает равные площади.

3° Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей этих эллиптических орбит.



$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = 0$$

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const.}$$

Следствия:

1. Движение в центральном поле является плоским.
2. В процессе движения сохраняется угловая скорость.



$$\frac{1}{2} \Sigma \vec{r}, d\vec{r} \int = d\vec{s}$$

$d\vec{s}$ - секторная перемещение

δ - секторная скорость.

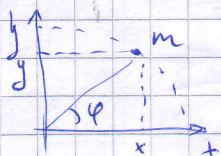
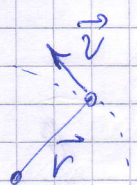
$$\vec{\delta} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2} \Sigma \vec{r}, \vec{v} \int = \frac{1}{m} \vec{N} = \text{const}$$

Выведем 1 закон Кеплера из законов механики.
Действую 2 закона:

$$\begin{cases} k + \Pi = E = \text{const} \\ \vec{N} = \text{const} \end{cases}$$

$$k = \frac{mv^2}{2}; \quad \Pi = -G \frac{mM}{r} \quad \int \quad GmM = A \Rightarrow \Pi = -\frac{A}{r}$$

$$\vec{N} = \Sigma \vec{r}, m\vec{v} \int = m \Sigma \vec{r}, \vec{v} \int$$



$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{N} = m \Sigma \vec{r}, \vec{v} \int = m \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ x & y & z \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{N} = k m (x \dot{y} - y \dot{x}) = \vec{k} N$$

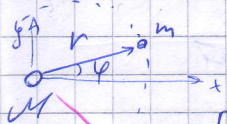
$$N = m (x \dot{y} - y \dot{x})$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$N = m r^2 \dot{\varphi}$$

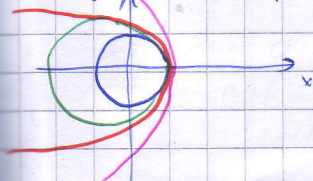
Система координат:



Уравнение траектории: $r = r(\varphi)$?
Ответ: $r(\varphi) = \frac{a}{1 + e \cos \varphi}$

Варианты траекторий:

- $E = 0$ окружность.
- $0 < E < 1$ эллипс
- $E = 1$ парабола
- $E > 1$ гипербола



Законы:

$$\text{ЗЕД: } \int \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{eA}{r} = E ; A = G \hbar m.$$

$$\text{ЗЦХ: } m r^2 \dot{\varphi} = N = \text{const.}$$

$$\int \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr}.$$

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2}$$

$$\int \dot{r}^2 + \frac{N^2}{m^2 r^2} = \frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2}$$

$$\int \dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2 r^2}} = \frac{dr}{dt}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Разделим второе на первое:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{mr^2}{N} \cdot \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2 r^2}}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{r^2}{N^2} \cdot \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}$$

Разделим на r^2 :

$$\frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}} = \pm d\varphi$$

Введём новую переменную:

$$S = \frac{1}{r} \rightarrow dS = -\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mAS}{N^2} - S^2}} = \pm d\varphi$$

Возведём в знаменателе под корень:

$$\begin{aligned} \frac{2mE}{N^2} + 2S \frac{mA}{N^2} - S^2 &= \frac{2mE}{N^2} - (S^2 - 2S \frac{mA}{N^2}) = \\ &= \frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4} - \frac{m^2 A^2}{N^4} - S^2 + 2S \frac{mA}{N^2} = \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4}}_{= a^2} - \underbrace{\left(S - \frac{mA}{N^2} \right)^2}_{= x^2} = a^2 - x^2$$

$$dS = dx$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm d\varphi$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) = \pm d\varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{x}{a} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{dx}{a}$$

$$\left(\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \right) d\varphi = \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) d\varphi = \frac{dx}{a}$$

$$d\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) = \pm d\varphi$$

$$\arcsin \frac{x}{a} = \pm \varphi + \text{const}$$

$$\text{выберем минус; const} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{a} = -\varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$$

$$x = a \cos \varphi$$

$$x = S - \frac{mA}{N^2}; \quad S = \frac{1}{n} \Rightarrow x = \frac{1}{n} - \frac{mA}{N^2}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{mA}{N^2} + a \cos \varphi \Rightarrow \frac{1}{\frac{mA}{N^2} + a \cos \varphi}$$

$$\Rightarrow n = \frac{M^2 / mA}{1 + \frac{a N^2}{mA} \cos \varphi}; \quad E = \frac{a N^2}{mA} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{N^2}{mA} \sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2 A^2}{N^4}} = \sqrt{1 + \frac{2EN^2}{mA^2}}$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{P}{1 + E \cos \varphi}; \quad P = \frac{N^2}{mA}; \quad E = \sqrt{1 + \frac{2EN^2}{mA^2}}$$

Если $E = 0$, то траектория — окружность или эллипс.
 $E = 0$ — парабола, скорость мала
 $E > 0$ — гиперболы, движение за пределами поля

Плоское движение твёрдого тела,

I. Вращение тела вокруг неподвижной оси

$$\vec{N} = \vec{M}$$

спроецируем на ось вращения:



$$N_z = M_z$$

$$M_z = J \omega_z; \quad \omega_z = \dot{\varphi}; \quad J = \sum_i m_i r_i^2$$

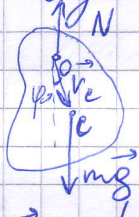
(φ - по правилу правого винта)

Угловое ускорение вращения: $\epsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}_z$

$$\Rightarrow N_z = J \epsilon_z = M_z$$

Пример: Физический маятник.
Действуют 2 основные силы:

$\odot$



каждой момент сил тангенты.
Разделим на материальные точки.

$$M = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{g}] = \sum_i \vec{r}_i m_i [\vec{g}]$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$\Rightarrow M = [\sum_i m_i \vec{r}_i, \vec{g}] = [\vec{r}_c, m \vec{g}] \Rightarrow$ суммарный момент сил тангенты, действующих на тело, таков, как если бы вся масса тела находилась в его центре масс.

$\vec{r}_c = \vec{r}_{c\perp}$ в данном случае;

$$M_z = -M$$

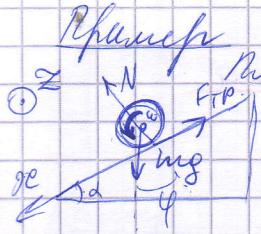
$$M = r_{c\perp} \cdot mg \cdot \sin \varphi \Rightarrow M_z = - mgl \sin \varphi$$

$$J \ddot{\varphi} = M_z$$

$$J \ddot{\varphi} = - mgl \sin \varphi$$

$$\left[\ddot{\varphi} + \frac{mgl \sin \varphi}{J} = 0 \right] \text{ - уравнение колебаний физического маятника.}$$

Пример Плоское движение твёрдого тела.



Условие кинематического связи:

$$x = R\varphi; \quad R - \text{радиус цилиндра.}$$

$$\ddot{x} = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon$$

Составим ур-е движения центра масс:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр.}}$$

Уравнение вращения напишем относительно оси, проходящей через центр масс:

$$J\varepsilon = R \cdot F_{\text{тр.}}$$

$$\ddot{x} = R\varepsilon$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \ddot{x}/R \\ F_{\text{тр.}} = \frac{J\varepsilon}{R} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \ddot{x}/R \\ F_{\text{тр.}} = \frac{J\ddot{x}}{R^2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \frac{J\ddot{x}}{R^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{mg \sin \alpha}{m - \frac{J}{R^2}}$$

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J}{mR^2}}$$

Сводка формул по плоскому движению:

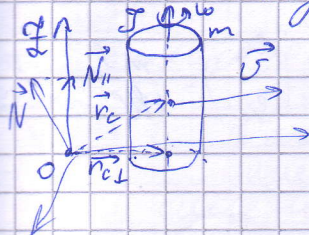
1) ур-е движения центра масс: $m\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внешн.}}$

2) ур-е вращения: $J\varepsilon = M_{\text{внешн.}}$

3) Импульс: $\vec{p} = m\vec{v}_c$

4) Кинетическая энергия: $K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}; \quad J = J_c$

5) Момент импульса: $\vec{N}_c = [\vec{v}_{c\perp}, m\vec{v}_c] + J\omega; \quad J = J_c$



Момент инерции твёрдого тела.

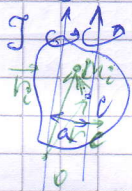


$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

Теорема Гюенса - Штейнера.

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции от оси, проходящей через центр масс тела $\parallel$ данной, и полной массы тела умноженной на квадрат расстояния между осями.

$$J = J_c + m a^2 \quad \text{Комментарий:}$$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}$$

$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i m_i (\vec{r}_{i\perp}, \vec{r}_{i\perp}) =$$

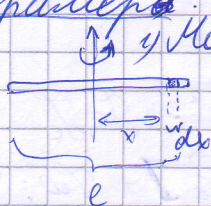
$$= \sum_i m_i (\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}, \vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}) =$$

$$= \sum_i m_i r_{c\perp}^2 + \underbrace{2 \vec{r}_{c\perp} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_{ic\perp}}_{=0} + J_c =$$

$$* : \sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = m \vec{r}_c - m \vec{r}_c = 0$$

$$\Rightarrow m r_{c\perp}^2 + J_c = m a^2 + J_c$$

Примеры:

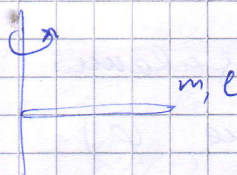


$$dm = \frac{m}{l} dx$$

$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

$$dJ = x^2 dm = \frac{m}{l} x^2 dx$$

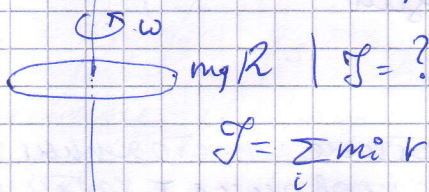
$$J = \int dJ = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m l^3}{12} = \frac{m l^2}{12}$$



$$J = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

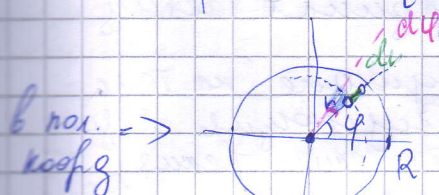
Пример:

2) Момент инерции диска (цилиндра)



$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

Разделим на материальные точки.



- элемент площади в полярных с.к.

$$dS = r dr d\varphi$$

$$S = \int dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr =$$

$$= 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2 = S - \text{верно}$$

$$dJ = r^2 dm; \quad dm = m \frac{dS}{S} \quad (\text{диск однородный})$$

$$dJ = r^2 m \frac{dS}{S} = \frac{r^2 m}{\pi R^2} dS = \frac{m}{\pi R^2} r^3 dr d\varphi$$

$$J = \int dJ = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} m R^2 = J \right] \quad \text{§18}$$

Системы со связями. Степени свободы.

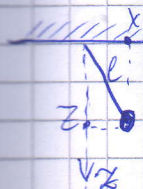
Обобщенные координаты.

Определение

Связи в механике - не вытекающие из уравнений движения ограничения на координаты, скорости и ускорения точек механической системы.

Пример:

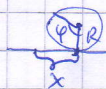
математический маятник.



$x^2 + z^2 = l^2$ - уравнение связи - соотношение между координатами точек системы, математически выражающее связь.

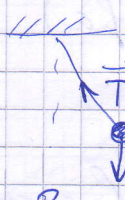
Пример:

Катение цилиндра без проскальзывания.



$$x = R\varphi \quad (\text{при повороте на } \varphi)$$

Милы сил:



1) Заданные силы (F)

2) Силы реакции (R)

T - сила реакции

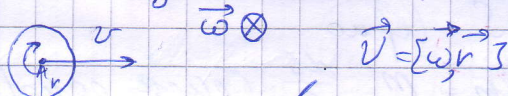
mg - заданная

Заданные силы - известные постоянные или известные функции координат частиц. (сила тяжести, сила упругости)

Силы реакции - силы, действующие на тела системы со стороны тел, реализующих связи. (сила нормального давления, натяжения, трения)

Голономная связь - связь, которая сводится к ограничению только на координаты тел.

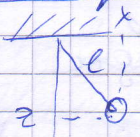
Пример не голономной связи: катение шара без проскальзывания.



Далее рассматриваем только голономные связи.

Стационарная связь - связь, уравнение которой не содержит времени в явном виде.

Пример нестационарной связи:



$$x^2 + z^2 = l^2(t) \quad (\text{длина нити меняется})$$

Число степеней свободы системы (S) это число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве.

Пример: для системы из N отдельных мат. точек $S = 3N - k$, k - число связей.

0 $N=1; k=0; S=3$

∞ $N=2; k=1; S=5$

∞ $N=3; k=3; S=6$

Твёрдого тела 6 степеней свободы.

Обобщенные координаты — любые S координат, полностью описывающие положение системы в пространстве.

$$q_1, q_2, \dots, q_s = \{q\}$$

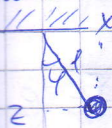
Обобщенные скорости — производные обобщенных координат по времени.

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s = \{\dot{q}\}$$

Основные свойства обобщенных координат:

1) Радиус-векторы точек системы являются однозначными функциями набора обобщенных координат. $\vec{r}_e$ — радиус-вектор точки № e ;
 $\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, \dots, q_s)$ (возможно $\vec{r}_e(q_1, \dots, q_s, t)$ — для нестационарных связей).

2) Обобщенные координаты образуют в тождество уравнения связей.



$$x^2 + z^2 = l^2$$

$$s=1; \quad q=\varphi$$

$$x^2 + z^2 - l^2 = 0$$

$$x = l \sin \varphi; \quad z = l \cos \varphi$$

§19

Виртуальные перемещения. Виртуальная работа
Идеальные связи.

Виртуальные перемещения — бесконечно малые перемещения, допускаемые связями в данный момент времени t .

$$\delta \vec{r}_e = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j = d\vec{r}_j$$

Символ δ действует, как обычный дифференциал, но отношению к координатам, но не ко времени.

Виртуальная работа — работа силы на виртуальном перемещении.

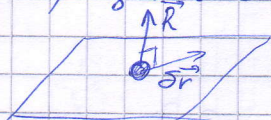
$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

Идеальные связи — связи, для которых виртуальная работа сил реакции равна нулю.

$$\delta A_R = \sum_{e=1}^N \vec{R}_e \cdot \delta \vec{r}_e = 0$$

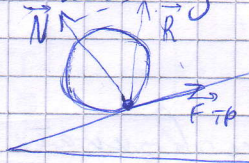
Примеры систем с идеальными связями:

1) Идеально гладкая плоскость.



$$\delta A_R = \vec{R} \delta \vec{r} = 0$$

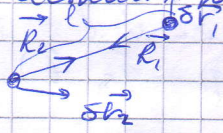
2) Качение без проскальзывания.



$$\delta \vec{r} = 0, \text{ т.к. нет проскальзывания.}$$

$$\vec{R} \delta \vec{r} = 0.$$

3) Математический маятник.



$$\text{ЗЗ Ньютона: } \vec{K}_1 = -\vec{K}_2$$

$$\delta A_K = \vec{K}_1 \delta \vec{r}_1 + \vec{K}_2 \delta \vec{r}_2 = \vec{K} (\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2) =$$

$$= \vec{K}_1 \delta (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = K \delta \vec{r} \propto$$



$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r} \quad K_1 = d \cdot \vec{r}$$

$$\delta A_R = d \vec{r} \delta \vec{r} = d r \delta r = \frac{d}{2} \delta r^2 = \frac{d}{2} \delta l^2 = 0$$

const

Уравнение Лагранжа (2.20) Обобщенные силы

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями.

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\delta A_K = \sum_{e=1}^N \vec{K}_e \delta \vec{r}_e = 0$$

$$\delta \vec{r}_e = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j$$

II Закон Ньютона для одной из точек:

$$m_e \ddot{\vec{r}}_e = \vec{F}_e + \vec{K}_e \quad | \cdot \delta \vec{r}_e \text{ (свободы исключить } \vec{K}_e)$$

$$\sum_{e=1}^N m_e \ddot{\vec{r}}_e \delta \vec{r}_e = \sum_{e=1}^N \vec{F}_e \delta \vec{r}_e + \delta A_K = 0$$

$$\sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{r}}_e - \vec{F}_e) \delta \vec{r}_e = 0 \quad - \text{уравнение Лагранжа}$$

перейдем к обобщенным координатам:

$$\sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{r}}_e - \vec{F}_e) \cdot \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

Поменяем порядок суммирования:

$$\sum_{j=1}^S \delta q_j \cdot \sum_{e=1}^N (m_e \ddot{\vec{r}}_e - \vec{F}_e) \cdot \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} = 0$$

Обозначим:

$$\sum_{e=1}^N m_e \ddot{\vec{r}}_e \cdot \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \equiv X_j$$

$$\sum_{e=1}^N \vec{F}_e \cdot \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \equiv Q_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^S (X_j - Q_j) \cdot \delta q_j = 0 \quad (*)$$

Из независимости обобщенных координат следует:
 $X_j = Q_j, \quad j = \overline{1, S}$
 (Предположим, $\exists j$, т.е. $X_j \neq Q_j$. Тогда противоречие в (*).

Покажем, что величину X_j можно выразить через кинетическую энергию системы и её производные по обобщенным координатам и обобщенным скоростям.

$$X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j}$$

$$k = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e \cdot v_e^2 = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e \cdot \vec{v}_e \cdot \vec{v}_e$$

$$\vec{v}_e = \dot{\vec{r}}_e$$

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\dot{\vec{r}}_e = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial t} = \vec{v}_e(q, \dot{q}, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \cdot \vec{v}_e \right) = \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \cdot \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \cdot \vec{v}_e \right) = \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \cdot \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \cdot \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} \right) = \underbrace{\sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j}}_{X_j} + \underbrace{\sum_{e=1}^N m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j}}_{\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j}} =$$

$$= X_j + \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\Rightarrow X_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} \quad \forall j = 1, 5$$

Уравнение Лагранжа относительно кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} = Q_j$$

$$k = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N m_e v_e^2 = k(q, \dot{q}, t)$$

$$Q_j = \sum_{e=1}^N \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial \dot{q}_j}$$

Q_j — обобщенная сила, $Q_j = \left[\frac{D_{me}}{Lq^3} \right]$

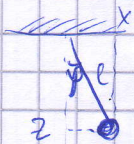
Два варианта: $[q] = \text{метр} \Rightarrow [Q_j] = [N]$

$[q] = \text{радиан} \Rightarrow [Q_j] = [D_{me}] = [N \cdot m]$

(проекция силы на ось или момента отн. некоторой оси).

Пример:

Математический маятник.



$$l = 1; q = \varphi$$

$$k = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi)$$

$$x = l \sin \varphi; z = l \cos \varphi$$

$$\dot{x} = \dot{\varphi} l \cos \varphi; \dot{z} = -\dot{\varphi} l \sin \varphi$$

$$v^2 = l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$Q = mg \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = mg \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$Q = -mg l \sin \varphi \quad \text{— момент силы тяжести}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \varphi} = 0; \frac{\partial k}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 = m l^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m l^2 \ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow m l^2 \ddot{\varphi} = Q = -mgl \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

по методу Ньютона:

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -T \sin \varphi \\ m \ddot{z} = mg - T \cos \varphi \\ x^2 + z^2 = l^2 \end{cases}$$

§ 21 Функции Лагранжа. Обобщенные импульсы

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями и заданными потенциальными силами.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j$$

$$Q_j = \sum_{l=1}^N \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$$

Выразим заданные силы через потенциальную энергию системы:

$$\vec{F}_l = - \text{grad} \Pi_l(\vec{r}) = - \left(\vec{i} \frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} + \vec{j} \frac{\partial \Pi_l}{\partial y_l} + \vec{k} \frac{\partial \Pi_l}{\partial z_l} \right)$$

$$\vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = - \left(\frac{\partial \Pi_l}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_l}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_l}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial q_j} \right)$$

Выразим потенциальную энергию через обобщенные координаты:

(радиус-векторы всех точек системы)

$$\Pi_l = \Pi_l(\vec{r})$$

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q, t)$$

$$\Pi_l = \Pi_l(q, t)$$

$$Q_j = - \sum_{l=1}^N \frac{\partial \Pi_l}{\partial q_j} = - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{l=1}^N \Pi_l$$

$$F_l = \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi_l}{\partial q_j}$$

$$\boxed{Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}}, \quad \Pi = \sum_{l=1}^N \Pi_l, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$$

$$\Pi = \Pi(q, t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial k}{\partial q_j} = Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

Функция Лагранжа системы — это разность кинетической и потенциальной энергии системы, выраженная через обобщенные координаты обобщенной системы и время. Её называют Лагранжиан.

$$L = k - \Pi = L(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, j = 1, \dots, S.$$

Обобщенный импульс — частная производная функции Лагранжа по обобщенной скорости.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, j = \overline{1, S}; [p] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{[q]}.$$

Если $[q] = \text{м}$, то $[p] = \text{м} \cdot \text{в}$

Если $[q] = 1$, то $[p] = \text{м} \cdot \text{в} \cdot \text{с}$.

Закон изменения обобщенного импульса:

Из функции Лагранжа:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, j = \overline{1, S}.$$

(скорость изменения импульса равна частной производной функции Лагранжа по соответствующей обобщенной координате)

Закон сохранения обобщенного импульса.

Если $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, то $p_j = \text{const}$.

Циклическая координата — координата, которая не входит явным образом в функцию Лагранжа системы.

Обобщенный импульс в соответствующей циклической координате сохраняется.

§22 Уравнение Гамильтона Канонические переменные.

Канонические переменные — это набор обобщенных координат и обобщенных импульсов системы.

Уравнение движения, записанное в этих координатах, называется уравнением Гамильтона.

$$q, \dot{q} \rightarrow q, p.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t).$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}; \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Возьмем дифференциал L :

$$dL = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dL = \sum_{j=1}^S (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\text{Введем } H := \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L$$

$$dH = \sum_{j=1}^S (p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j - p_j d\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_{j=1}^S (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Выразим H через q_j, p_j и t :

$$H = H(q, p, t)$$

$$dH = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Приравняем коэффициенты при дифференциалах

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \text{ — уравнения Гамильтона}$$

$$H = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L = H(q, p, t) \text{ — Гамильтониан системы.}$$

Закон изменения Гамильтониана

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^S (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{p}_j \dot{q}_j) + \frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\text{Если } \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \text{ то } H = H(p, q) = \text{const.}$$

Консервативная система — система, Гамильтониан которой не зависит явно от времени $\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial t} = 0$.

Покажем, что Гамильтониан консервативной системы имеет смысл её полной максимальной энергии:

$$H = K + \Pi ?$$

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (K - \Pi) = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N m_{\ell} \vec{v}_{\ell}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N m_{\ell} \vec{v}_{\ell} \vec{v}_{\ell}$$

$$\vec{v}_{\ell} = \dot{\vec{r}}_{\ell}$$

$$\vec{r}_{\ell} = \vec{r}_{\ell}(q) = \vec{r}_{\ell}(q_1, \dots, q_s)$$

$$\vec{v}_{\ell} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_{\ell}}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N m_{\ell} \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_{\ell}}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \vec{r}_{\ell}}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\beta}$$

Изменим пределы суммирования:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s \dot{q}_{\alpha} \cdot \dot{q}_{\beta} \underbrace{\sum_{\ell=1}^N m_{\ell} \frac{\partial \vec{r}_{\ell}}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\ell}}{\partial q_{\beta}}}_{= K_{\alpha\beta}(q)}$$

$$\text{Обозначим } \sum_{\ell=1}^N m_{\ell} \frac{\partial \vec{r}_{\ell}}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\ell}}{\partial q_{\beta}} = K_{\alpha\beta}(q) = K_{\beta\alpha}(q).$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}$$

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} \left(\dot{q}_{\alpha} \frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_{\beta} \frac{\partial \dot{q}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

$$p_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} (\dot{q}_{\alpha} \delta_{\beta j} + \dot{q}_{\beta} \delta_{\alpha j})$$

$$p_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_{\alpha} \sum_{\beta=1}^s K_{\alpha\beta} \delta_{\beta j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \dot{q}_{\beta} \sum_{\alpha=1}^s K_{\alpha\beta} \delta_{\alpha j} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \dot{q}_{\alpha} k_{\alpha j} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^S q_{\beta} k_{j\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S k_{\alpha j} \dot{q}_{\alpha} = p_j; j=1, S$$

$$\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j = \sum_{\alpha=1}^S \sum_{\beta=1}^S k_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = 2k$$

$$H = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - K = 2k - (k - \Pi) = k + \Pi, \text{ а. т. с.}$$

Гамильтониан консервативной системы — сумма кинетической и потенциальной энергии, выраженная через обобщённые координаты и обобщённые импульсы системы.

$$H = K + \Pi = H(p, q).$$

Пример:

Частица в потенциальном силовом поле

$$S=3, q_1=x, q_2=y, q_3=z.$$

$$\Pi = \Pi(x, y, z).$$

$$K = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; p_y = m\dot{y}; p_z = m\dot{z}$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}; \dot{y} = \frac{p_y}{m}; \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$K = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z).$$

§ 23 Равновесие и его устойчивость

Равновесие — состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

Устойчивость равновесия

$$1) \forall \text{ МТ } \vec{F}_e + \vec{R}_e = 0, e = 1, N.$$

В состоянии равновесия сумма заданных сил и сил реакции должна равняться нулю КМТ системы.

2) Для систем с идеальными связями можно

~~не добавляя~~ исключить R_e из условия равновесия:

$$\sum_{e=1}^N \vec{F}_e \delta \vec{r}_e = 0 - \text{принцип виртуального перемещения}$$

$$\delta \vec{r}_e = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j$$

Принцип виртуального перемещения в положении равновесия: виртуальная работа заданных сил равна 0.

$$\sum_{e=1}^N \vec{F}_e \cdot \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^S \delta q_j \underbrace{\sum_{e=1}^N \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}}_{Q_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j = 0$$

Из независимости обобщённых координат следует:

$$3) Q_j = 0, j = \overline{1, S}$$

В положении равновесия все обобщённые силы должны быть равны 0.

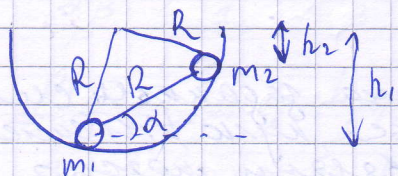
$$4) Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, j = \overline{1, S} \Rightarrow \text{потенциальная}$$

энергия системы должна ~~быть равна нулю~~ иметь экстремум по всем обобщённым координатам.

Равновесие устойчиво, если система, выведенная из этого состояния и предоставленная самой себе начинает двигаться в сторону положения равновесия.

Пример:

Гантеля в сферической чаше



$\alpha = ?$

$S = 1$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0 - \text{условие равновесия}$$

$$q = \alpha$$

$$\Pi = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = \Pi(\alpha)$$

$$-m_1 g k \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - m_2 g k \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = -m_1 g k \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + m_2 g k \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 0$$

$$m_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = m_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$m_1 \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) = m_2 \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right)$$

$$m_1 (1 - \sqrt{3} \tan \alpha) = m_2 (1 + \sqrt{3} \tan \alpha)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

§24

Колебания в системах с одной степеню свободы

Колебания - повторяющиеся движения в окрестности положения ~~равновесия~~ устойчивого равновесия системы.

Уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

x - отклонение обобщённой координаты колеблющегося тела относительно положения равновесия

$$x = q - q_0$$

$$[\omega] = \text{с}^{-1}, \quad \omega - \text{частота колебаний}$$

$$\text{Общее решение: } x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Гармоническая функция - функция, меняющаяся по закону $\sin$ или $\cos$.

T - период колебаний - продолжительность одного колебания, $[T] = \text{с}$.

A - амплитуда колебаний - максимальное отклонение колеблющегося тела от положения равновесия

$\varphi = \omega t + \varphi$ - фаза колебаний - аргумент тригонометрической функции, описывающей колебание

$$\varphi(t=0) = \varphi - \text{начальная фаза.}$$

Определение амплитуды и начальной фазы.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi); \quad \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} x(0) = A \cos \varphi = x_0 \\ \dot{x}(0) = -A\omega \sin \varphi = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 / \omega^2}$$
$$\cos \varphi = \frac{x_0}{A}, \quad \sin \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{A\omega}$$

Как найти частоту колебаний.

Курно записать уравнение движения системы, затем привести его к стандартному виду уравнения гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Пример Физический маятник — твердое тело, вращающееся вокруг некоторой оси.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ — связь } T \text{ и } \omega$$



$$S=1, \quad q=\varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$L = K - \Pi = \frac{J \dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi = \frac{J \dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi = L(\varphi, \dot{\varphi})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J \ddot{\varphi}$$

$$J \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

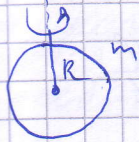
$$\triangle \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \varphi \approx \varphi$$

$$J \ddot{\varphi} + mgl \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J} \varphi = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad \text{— расстояние между осью и центром масс}$$

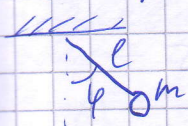
Пример: Физический маятник в виде кольца



$$l = R$$

$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgR}{2mR^2}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

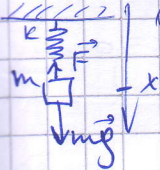
Пример: математический маятник



$$J = ml^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} - \text{формула Рюйенса}$$

Пример



пружинный осциллятор

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - l)$$

$$m\ddot{x} + k(x - l) - mg = 0$$

$$m\ddot{x} + k\left(x - l - \frac{mg}{k}\right) = 0$$

$$\ddot{x} = \ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = 0; \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

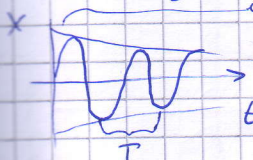
§25

Физические эффекты колебательной системы

Типы колебаний:

1) Гармонические колебания: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

2) Затухающие колебания: $\ddot{x} + d\dot{x} + \omega^2 x = 0$



$$Q = \frac{T_{\text{зат}}}{T} - \text{добротность системы}$$

сколько колебаний будет совершено до затухания маятника.

3) Нелинейное колебание: $\ddot{x} + f(x) = 0$

Пример:

математический маятник: $\ddot{x} + \omega^2 \sin \varphi = 0$

$$E = K + \Pi = \text{const}$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2; \quad \Pi = -mgl \cos \varphi$$

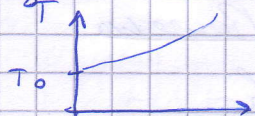
$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = \text{const}$$

$$\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{l} \cos \varphi + \text{const} \Rightarrow \dot{\varphi} = \pm \sqrt{2 \frac{g}{l} \cos \varphi + c} = \frac{d\varphi}{dt}$$

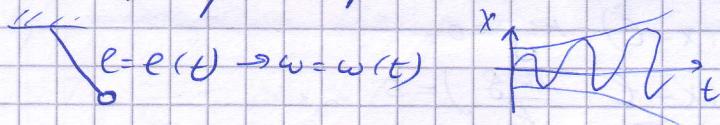
$$\pm \int_0^t dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{c + 2 \frac{g}{l} \cos \varphi}} - \text{эллиптический}$$

интеграл. Не берётся.

Основная особенность таких колебаний — зависимость T от A



4) Параметрические колебания: $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$



5) Вынужденные колебания — колебания, происходящие под действием переменной внешней силы.

$$\ddot{x} + d\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$$f(t) = f_0 \cos \omega t$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \frac{1}{2} e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} f_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

$$\ddot{x} + d\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = \frac{1}{2} f_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

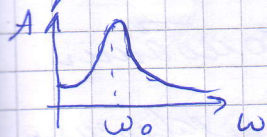
$$x(t) = \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + \text{к.с.} - \text{ищём решение.}$$

$$(-\omega^2 + i\omega d + \omega_0^2) A = f_0$$

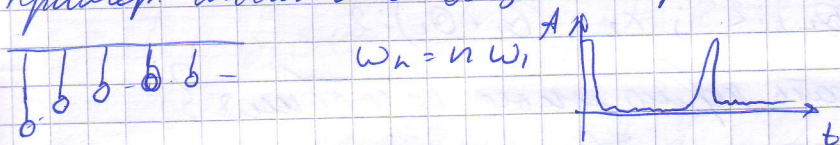
$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega d} = A(\omega).$$

Резонанс - возрастание амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты изменения внешней силы с собственной частотой колебаний системы.

Максимальное частное решение описывает установившиеся колебания, т.е. колебания, которые устанавливаются в системе спустя большое время t .



Пример: ансамбль осцилляторов:



§26.

Нормальные колебания и нормальные координаты.

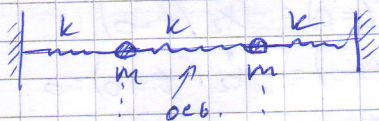
(Колебания в системах с несколькими степенями свободы)

Нормальные колебания - это гармонические колебания на одной из собственных частот системы.

Нормальные координаты - это обобщенные координаты, которые при свободном движении системы меняются независимо друг от друга.

Пример:

2 степени свободы



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + kx_2 \end{cases}$$

$x_1(t), x_2(t) ?$

Возьмем ур-я, затем вычтем одно из другого:

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -kx_1 - kx_2 = -k(x_2 + x_1) \\ m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Введём новые координаты: $Q_1 = x_1 + x_2$; $Q_2 = x_2 - x_1$

$$\begin{cases} m\ddot{Q}_1 + kQ_1 = 0 \\ m\ddot{Q}_2 + 3kQ_2 = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = 0, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

ω_1, ω_2 — собственные частоты колебаний системы.

Поскольку нормальные координаты независимы.

$$x_1 = (Q_1 - Q_2) : 2; \quad x_2 = (Q_1 + Q_2) : 2.$$

Как наблюдать нормальные колебания?

нормальные колебания:

$$\omega_1: Q_1(t) = 0 \quad \forall t \quad d_1 = 1 \quad d_2 = ?$$

Зададим $Q_2(t=0) = 0$
как $\dot{Q}_2(t=0) = 0$



$$\Rightarrow x_1(t=0) = x_2(t=0)$$

$$\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0 \leftarrow \text{без начальной скорости}$$

нормальные колебания:

$$Q_1(t) = 0 \quad \forall t, \quad \omega_1$$



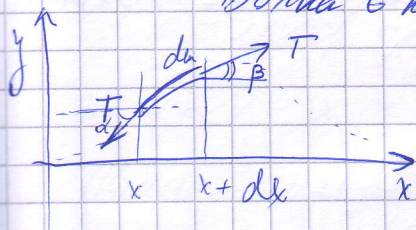
$$\begin{cases} Q_1(t=0) = 0 \\ \dot{Q}_1(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t=0) = -x_2(t=0) \\ \dot{x}_1(t=0) = -\dot{x}_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

§27

Механика волновых процессов

Волна — колебание, распространяющееся в сплошной среде.

Пример: волна в катящейся струне



ℓ -длина струны

$\rho = \frac{m}{\ell}$ - линейная плотность

T - сила натяжения
 $\alpha, \beta \ll 1 \Rightarrow \sin \approx \tan$

$$\begin{aligned} dm &= \rho dx \\ dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \sin \beta - T \sin \alpha = T (\sin \beta - \sin \alpha) = \\ &= T (\tan \beta - \tan \alpha) = T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) = \\ &= T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \right) = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad y = y(x, t) \end{aligned}$$

Полное уравнение - волновое.

$$\frac{T}{\rho} = \text{const} \cdot \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}} \right] = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \right]$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Общее решение уравнения:

$$y(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 f_1'' + v^2 f_2'' = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f_1 + f_2)$$

Физический смысл общего решения:

$$\begin{aligned} \text{положим } x - vt &= \text{const} \\ dx &= v dt \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Бегущие волны

Бегущая волна - волна, которая описывается произведением функции времени на функцию координаты

$y(x, t) = X(x) \cdot \Theta(t)$ — будем искать решение в таком виде

$$\ddot{y} = X \cdot \ddot{\Theta} = v^2 \Theta X''$$

Разделим переменные:

$$-\omega^2 \frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = \frac{v^2 X''}{X} \leftarrow \text{не зависит от } t$$

не зависит от X .

$\Rightarrow$ не зависит ни от x , ни от t

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\Theta} + \omega^2 \Theta = 0 \\ X'' + \frac{\omega^2 X}{v^2} = 0 \end{cases}$$

$$\left[\frac{\omega}{v} \right] = \frac{1}{\lambda}$$

$k \equiv \frac{\omega}{v}$ — волновое число

Частное решение:

$$\Theta(t) = A \sin \omega t$$

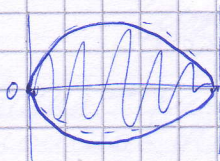
$$X(x) = B \sin kx$$

Найдём частоту колебаний струны:

$$\begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ 0 \quad l \end{array} \quad \begin{cases} X(x=0) = 0 \\ X(x=l) = 0 \end{cases} \Rightarrow kl = \pi$$

$$\omega = k v = \frac{\pi}{l} v$$

$$\omega = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$



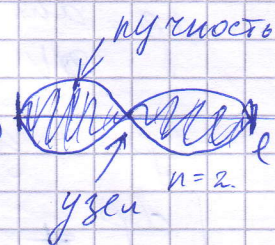
такое колебание — основное тон. ($kl = \pi$)

Если $k \ell = 12 \pi$, $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow k$ - набор чисел, $k = k_n = n \frac{\pi}{\ell}$

$$\omega = kV = \omega_n = V k_n = n \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Макс колебания - вершины



Звуковая волна в воздухе

Представим, что звук распространяется в прямом труде.



S - площадь сечения

x, t - переменные $\rightarrow$

V_x - скорость продольной частицы.

ρ - плотность воздуха. $[kg/m^3]$

P - давление воздуха. $[Pa = \frac{N}{m^2}]$

$$dm = \rho dV; \quad dV = S dx$$

$$dm \frac{\partial V_x}{\partial t} = \rho(x) S - \rho(x+dx) S = S(\rho(x) - \rho(x+dx))$$

$dx \rightarrow 0$

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(x+dx) = \rho(x) + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx$$

$$\Rightarrow dm \frac{\partial V_x}{\partial t} = -S \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} dx = -\rho S dx \frac{\partial V_x}{\partial t}$$

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$(\text{Втекают}) dm^{(+)} = V_x(x) S dt \cdot \rho(x)$$

$$(\text{Вытекают}) dm^{(-)} = V_x(x+dx) S dt \rho(x+dx)$$

$$dm = dm^{(+)} - dm^{(-)} = S dt (V_x(x) \rho(x) - V_x(x+dx) \rho(x+dx))$$

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$V_x(x+dx) \rho(x+dx) = V_x(x) \rho(x) + \frac{\partial}{\partial x} (V_x \rho) dx$$

$$\Rightarrow dm = -S dt \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) dx$$

$$dp = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{S dt}$$

$$dp = -dt \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x)$$

$$\int \frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) = 0 - \text{уравнение непрерывности.}$$

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Далее рассмотрим малую звуковую волну

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad |\rho'| \ll \rho_0$$

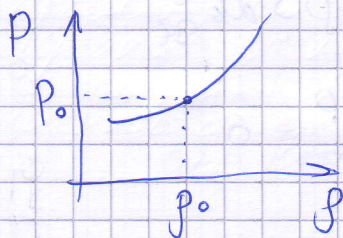
$$p = p_0 + p' \quad |p'| \ll p_0$$

~~Введем~~

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

Нарисуем зависимость давления воздуха от плотности



На маленьком интервале аппроксимируем зависимость p от ρ линейной функцией

$$\Rightarrow p' = \text{const} \rho'$$

$$\left[\frac{p'}{\rho'} \right] = \left[\frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{кг}} \right] = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}} \right] = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \right]$$

$$\frac{p'}{p_0} = c^2 \quad ; \quad c_0 - \text{скорость.}$$

$$p' = c^2 p_0$$

$$\rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial t} + c^2 \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} + c^2 \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} - \rho_0 c^2 \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}}$$

c - скорость звука в воздухе

$$c_0 = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{p=p_0}}$$

Для изотермического процесса $pV = \text{const}$

$$p = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{p} \Rightarrow p \frac{m}{p} = \text{const}$$

$$\frac{p}{p} = \text{const} = \frac{p_0}{p_0}$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \approx \sqrt{\frac{10^5 \text{ Па}}{1,3 \text{ кг/м}^3}} \approx 330 \text{ м/с (теория)}$$

(опыт - 330 м/с)

§28 Случайные величины и вероятности

Описывая системы с большим количеством частиц будем использовать не закон движения, а вероятность состояния.

Случайное событие - событие исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого можно многократно повторить.

Вероятность случайного события - отношение числа появлений события в серии испытаний к полному числу испытаний $\rightarrow \infty$

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}; \quad 0 \leq P \leq 1$$

Аксиома сложения вероятностей: вероятность наступления одного из взаимноисключающих событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Аксиома умножения вероятностей: вероятность наступления независимых случайных событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Случайная величина - величина значение которой нельзя предсказать заранее, но измерение которой можно многократно повторить.

Для непрерывных случайных величин вводят понятие распределения плотности вероятности - отношение вероятности попадания случайной величины в маленький интервал длины заданного значения к величине интервала, когда интервал стремится к 0:

$$\omega(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x)}{\Delta x} \right); \quad \omega \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1$$

Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1$

Правило вычисления средних: $\langle f(x) \rangle = \bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \omega(x) dx$

Среднее значение случайной величины: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \omega(x) dx$

Дисперсия - средний квадрат отклонения случайной величины от среднего значения.

$$\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \omega(x) dx$$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Пример:

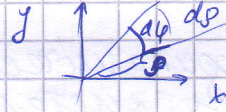
распределение Гаусса:

$$\omega(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \quad -\infty < x < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \sqrt{2\pi}$$

Интеграл Пуассона:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho d\rho = \pi = \sigma^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\pi}$$

двухмерная плотность вероятности — отношение вероятности попадания нескольких случайных величин в малые интервалы длины заданных точек к произведению величин интервалов, когда все интервалы $\rightarrow 0$.

$$\omega(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

$$\omega \geq 0; \int \omega dx dy = 1$$

Условные нормировки: $\iint \omega(x, y) dx dy = 1$

Правило вычисления средних: $f(x, y) = \iint f(x, y) \omega(x, y) dx dy$

Понижение порядка распределения:

$$\omega_1(x) = \int \omega(x, y) dy; \omega_2(y) = \int \omega(x, y) dx$$

Независимые случайные величины:

$$\omega(x, y) = \omega_1(x) \omega_2(y)$$

§ 2.9. Распределение Гиббса.

Основной закон статистической механики равновесных систем — в состоянии термодинамического равновесия распределение плотности вероятности для различных состояний системы описывается формулой Гиббса:

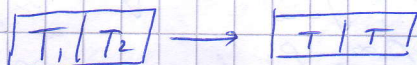
$$\omega(z) = c e^{-K(z)/kT}$$

где z — совокупность обобщенных координат и обобщенных импульсов системы; K — гамильтониан.

($z = q, p$; $K = K(q, p) = K(q, p)$); k — постоянная Больцмана $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$; T — абсолютная температура; $T = t + 273^\circ \text{C}$; c — нормировочная постоянная.

Термодинамическое равновесие - состояние в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

Пример:



нет равновесия есть равновесие.

Температура - то, что измеряется термометром.

Градус Цельсия - единица измерения температуры. Определяется как $\frac{1}{100}$ интервала между $T_{\text{плавления льда}}$ и $T_{\text{кипения воды}}$ при нормальном давлении.

Следствия распределения Гиббса

1) Распределение молекул по скоростям.

$$(1) \omega(V_x, V_y, V_z) = e^{-m(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)/2kT}$$

$\Rightarrow$ m - масса молекулы; V_x, V_y, V_z - проекции;
; $-\infty < V_x, V_y, V_z < \infty$.

Декартовы компоненты скорости молекулы - независимые случайные величины. Каждая из них подчиняется распределению Гаусса.

(1) - распределение Максвелла.

$$\omega(V_x) = e^{-mV_x^2/2kT}, \quad -\infty < V_x < \infty$$

Пример:



Уравнение состояния газа
- сосуд; V - его объем; T - температура в сосуде; N - число молекул.
Каждый давление p - ?



$v_x \Delta t$

осб x :

$$\Delta p = 2mV_x$$

$$n = \frac{N}{V} \text{ - концентрация молекул.}$$

Изменение импульса молекулы в одном ударе в проекции на ось x :

Рассмотрим молекулы, имеющие

скорости в определенном интервале: $[V_x, V_x + dV_x]$

Все молекулы в объеме $\delta V_x dt$: $n \delta V_x dt$.

Кон-во молекул в объеме $\delta V_x dt$ со скоростями из интервала $[V_x, V_x + dV_x]$: $n \delta V_x dt \omega(V_x) dV_x$.

$$\Rightarrow dp = \frac{2mV_x n \delta V_x dt \omega(V_x) dV_x}{\delta t} = 2mV_x^2 n \omega(V_x) dV_x$$

элементарное давление излучения молекул со скоростями из интервала.

$$p = \int dp = 2mn \int_{-\infty}^{+\infty} V_x^2 \omega(V_x) dV_x$$

только для $V_x \geq 0$

$$\Rightarrow p = m n \int_{-\infty}^{+\infty} V_x^2 \omega(V_x) dV_x$$

$\overline{V_x^2}$ - среднеквадратичная скорость

$$p = mn \overline{V_x^2}$$

$$\omega(V_x) = C e^{-\frac{m V_x^2}{2kT}} \int_0^{+\infty} V_0^2 \cdot \frac{2kT}{m}$$

$$\Rightarrow \omega(V_x) = C e^{-\frac{V_x^2}{V_0^2}}$$

$$d\omega = \omega \left(-\frac{1}{V_0^2} \right) \cdot 2V_x dV_x$$

$$\omega V_x dV_x = -\frac{V_0^2}{2} d\omega$$

$$\overline{V_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} V_x^2 \omega dV_x = -\frac{V_0^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} V_x d\omega = -\frac{V_0^2}{2} \left[V_x \omega - \int \omega dV_x \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \overline{V_x^2} = \frac{V_0^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2kT}{m} = \frac{kT}{m}$$

$$\Rightarrow p = mn \overline{V_x^2} = mn \frac{kT}{m} = nkT$$

уравнение идеального газа

p - давление газа; n - концентрация молекул; T - абсолютная температура; k - постоянная Больцмана.

Пример: распределение частиц в потенциальном силовом поле

$$\omega(x, y, z) = C e^{-\Pi(x, y, z)/kT}$$

- распределение Больцмана.

Распределение молекул воздуха в атмосфере Земли:

$$w(z) = C e^{-mgz/kT}$$

Средняя высота частицы в поле тяжести:

$$\bar{z} = \int_0^{\infty} z w(z) dz; \quad z_0 = \frac{kT}{mg}$$

$$w(z) = C e^{-z/z_0}$$

$$dw = w \left(-\frac{1}{z_0} \right) dz$$

$$w dz = -z_0 dw$$

$$\bar{z} = -z_0 \int_0^{\infty} z dw = -z_0 [z w|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} w dz] = z_0$$

$$\bar{z} = z_0 = \frac{kT}{mg}$$

§30

Размер и масса молекул.

Оценим массу молекулы воздуха.

$$p = nkT; \quad n = \frac{N}{V}$$

Нормальные условия: $p_0 = 760 \text{ мм. рт. ст.}$;
 $t_0 = 0^\circ \text{C}$ ($p_0 = 10^5 \text{ Па}$; $t_0 = 273^\circ \text{K} = T_0$)

$n = n_0 = \frac{p_0}{kT_0}$ — концентрация молекул
 любого газа при нормальных условиях.

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{^\circ \text{C}}$$

$$n_0 = \frac{10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} \text{ м}^{-3} = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \text{ — число}$$

молекул.

Плотность воздуха при нормальных
 условиях $\rho_0 = 1,3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

$$\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{m_0 \cdot N}{V} = m_0 n_0$$

$$m_0 = \frac{\rho_0}{n_0} = \frac{1,3}{2,7 \cdot 10^{25}} \text{ кг} \Rightarrow m_0 = 0,5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$$

Из того, что жидкость несжимаема, следует, что плотность жидкости примерно равна плотности вещества в молекуле.

$$\rho_{\text{ж}} = \frac{m_0}{d^3} \approx 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{m_0}{\rho_{\text{ж}}}} = \sqrt[3]{\frac{0,5 \cdot 10^{-25} \text{ кг}}{10^3 \text{ кг/м}^3}} = \sqrt[3]{0,5 \cdot 10^{-28}} \text{ м} = \sqrt[3]{50} \cdot 10^{-10} \text{ м} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$A = 10^{-10} \text{ м (ангстрем)}$$

Найдём скорость молекул воздуха:

$$V_x^2 = \frac{kT}{m_0}$$

$$V_T = \sqrt{V_x^2} = \sqrt{\frac{kT}{m_0}}$$

$$V_T = \sqrt{\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \text{ М/с}}{0,5 \cdot 10^{-25}}} = 40^2 \cdot \sqrt{\frac{1,38 \cdot 3}{0,5}} \text{ м/с} \Rightarrow V_T \approx 300 \text{ М/с}$$

Среднее расстояние между молекулами воздуха:

$$\begin{array}{c} \text{O} \quad \quad \text{O} \\ \text{m} \quad \quad \text{m} \\ \text{d} \quad \quad \text{d} \end{array} \quad \ell \quad \quad d \quad \quad \ell \approx 10d$$

Среднее время свободного пробега: $\tau = 10^{-9} \text{ с}$.

Оценки получились простыми из-за того, что мы знаем значение k .

Измерение постоянной Больцмана

Для измерения этой постоянной можно исследовать броуновское движение — движение частиц взвешенной пыли в воде, которое можно наблюдать с помощью микроскопа.

$$\overline{x} = \frac{kT}{mg}$$



Перрен взял в качестве броуновской частицы антраценовую краску:

$$d = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \rho = 1,25 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$mg \rightarrow (\rho - \rho_0) \frac{\pi}{6} d^3 g$$

$$\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$$

плотность воды, т.к. учитываем силу Архимеда

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{kT \cdot 6}{(\rho - \rho_0) \pi d^3 g}$$

$$k = \frac{\bar{z} (\rho - \rho_0) \pi d^3 g}{6T}$$

В опыте Перрена $\bar{z} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$

$$\Rightarrow k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/градус}$$

Факты, подтверждающие распределение Гидоса:

① свойства газа:

$$p = nkT; n = \frac{N}{V}$$

$$N = N_A \cdot \nu, N_A - \text{постоянная Авогадро}$$

$$pV = \nu N_A kT$$

$$R = N_A \cdot k = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}} - \text{универсальная газовая постоянная}$$

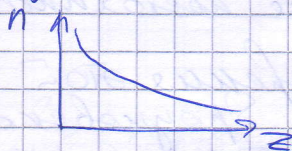
$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$pV = \nu RT$ - уравнение Менделеева - Клапейрона (или объединенный закон идеального состояния)

② Распределение воздуха в атмосфере Земли

$$W(z) = C e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$



$$n_0 = n(z=0); z_0 = \frac{kT}{mg}$$

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{z}{z_0}}$$

$$\lambda_0 = \lambda = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{0,5 \cdot 10^{-25} \cdot 10} \text{ м} = 8 \text{ км.}$$

§31. Распределение энергии по степеням свободы

В состоянии ~~теплого~~ термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная $\frac{kT}{2} = E$ — это закон равнораспределения энергии по степеням свободы.

Квадратичная степень свободы — переменная, вклад которой в Гамильтониан пропорционален квадрату этой переменной.

$$H(z) = az_1^2 + H'(z') \leftarrow \begin{array}{l} \text{канонические} \\ \text{переменные} \end{array}$$

↑ $a = a(z')$ канонические переменные

Для частиц в потенциальном силовом поле

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z)$$

$$E = \overline{az_1^2} = \int az_1^2 \omega(z) dz$$

$$\omega(z) = ce^{\frac{-H(z)}{kT}}$$

$$E = \int az_1^2 ce^{\frac{-az_1^2}{kT}} \cdot e^{\frac{-H'(z')}{kT}} dz_1 dz'$$

$$E = \int ce^{\frac{-H'(z')}{kT}} dz' \underbrace{\int az_1^2 e^{\frac{-az_1^2}{kT}} dz_1}_{= J}$$

$$de^{\frac{-az_1^2}{kT}} = -\frac{a}{kT} \cdot 2z_1 \cdot e^{\frac{-az_1^2}{kT}} dz_1,$$

$$a z_1 e^{-a z_1^2 / kT} dz_1 = -\frac{kT}{2} d e^{-a z_1^2 / kT}$$

$$\mathcal{I} = \int a z_1^2 e^{-a z_1^2 / kT} dz_1 =$$

$$= -\frac{kT}{2} \int z_1 d e^{-a z_1^2 / kT} =$$

$$= -\frac{kT}{2} \left(z_1 e^{-a z_1^2 / kT} \Big|_{z_1=0}^{z_1=\infty} - \int e^{-a z_1^2 / kT} dz_1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{I} = \frac{kT}{2} \int e^{-a z_1^2 / kT} dz_1$$

$$E = \overline{a z_1^2} = \frac{kT}{2} \int dz' e e^{-H'(z')/kT} \cdot e^{-a z_1^2 / kT} dz_1$$

$$E = \frac{kT}{2} \int \underbrace{e e^{-H(z)/kT}}_{\omega(z)} dz$$

$$E = \overline{a z_1^2} = \frac{kT}{2}$$

Пример: внутренняя энергия идеального газа.
Внутренняя энергия системы $\mathcal{U}$ — $\mathcal{H}$ (среднее значение гамильтониана; $\mathcal{H} = \bar{K} + \bar{\Pi} = \mathcal{U}$).

Идеальным называется газ, состоящий из невзаимодействующих частиц. ($\bar{\Pi} = 0$)

$\mathcal{U} = \bar{H} = \bar{K} = N \bar{\epsilon}_0$; N — число молекул.

1 молекула имеет 3 степени свободы.

$$\mathcal{U} = N S \frac{kT}{2}; \quad N = \nu N_A$$

$$\mathcal{U} = \nu N_A S \frac{kT}{2}; \quad N_A k = R$$

$$\mathcal{U} = \nu S \frac{RT}{2}$$

Теплоёмкость идеального газа — отношение полученного телом тепла к приращению

температуры: $C = \frac{dQ}{dT}$.

Первый закон термодинамики утверждает, что теплота, полученная газом, идёт на увеличение внутренней энергии и на совершение работы.

$$dQ = dU + dA$$

$$dA = p dV ; V = \text{const} \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow dA = 0$$

$$dQ = dU ; dU = \nu \frac{5}{2} R dT$$

$$c_v = \left(\frac{dQ}{\nu dT} \right) = \frac{dU}{dT} = \nu \frac{5}{2} R$$

$$c_v = \frac{1}{2} \nu R$$

Газы бывают:

$S=3$ (He, Ne) - одноатомные ($c_v = \frac{3}{2} \nu R$)

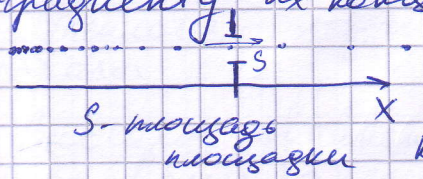
$S=5$ - двухатомные ($c_v = \frac{5}{2} \nu R$)

$S=6$ - ~~трех~~ многоатомные ($c_v = 3 \nu R$)

Диффузия и теплопроводность

Диффузия — проникновение одного вещества в другое.

Закон диффузии: плотность потока частиц пропорциональна градиенту их концентрации.

 S — площадь поперечного сечения

$$n = \frac{N}{V} \text{ м}^{-3}$$

$\frac{\Delta N_x}{S \Delta t}$ — плотность потока

$$j_x = \frac{\Delta N_x}{S \Delta t} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \quad D - \text{коэффициент диффузии}$$

$$|D| = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

Физический смысл D — время ^{темпл} распыливания диффузионного пятна

Формальное определение: коэффициент диффузии — коэффициент пропорциональности между плотностью потока частиц и ~~коэффициентом~~ градиентом концентрации.

Выведем уравнение сохранения числа частиц



$\Delta N_x^{(+)}$ — частицы, входящие в кубик

$$\Delta N_x^{(+)} = j_x(x) S \Delta t$$

$\Delta N_x^{(-)}$ — кол-во выходящих частиц.

$$\Delta N_x^{(-)} = j_x(x + \Delta x) S \Delta t$$

ΔN — приращение частиц внутри кубика за Δt

$$\Delta N = \Delta N_x^{(+)} - \Delta N_x^{(-)} = S \Delta t \cdot (j_x(x) - j_x(x + \Delta x))$$

$$\Delta x = dx \rightarrow 0$$

Разностью в прот. Тельфа:

$$j_x(x+dx) = j_x(x) + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx$$

$$\Rightarrow \Delta N = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \underbrace{dx \cdot S \cdot \Delta t}_{\Delta V}$$

Приращение концентрации:

$$\Delta n = \frac{\Delta N}{\Delta V} = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta t$$

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x} ; \Delta t \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

$$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

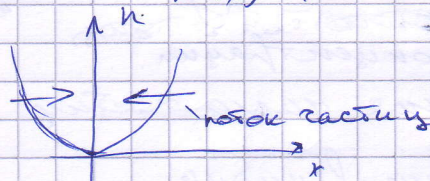
$$\rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} - D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}} \quad \text{искомое уравнение}$$

$$n = n(x, t)$$

Пример:

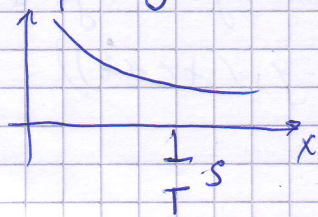
$$n(x) \sim x^2$$



II Теплопроводность - процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле.

Закон теплопроводности.

Плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры



$\frac{\partial Q_x}{\partial t \cdot S}$ - плотность потока тепла,

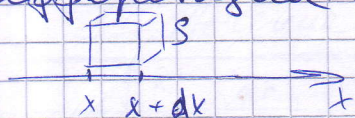
$$j_x = \frac{\Delta Q_x}{S \Delta t} = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}$$

α — коэффициент теплопроводности — это коэффициент пропорциональности между плотностью потока тепла и градиентом температуры.

$$[\alpha] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$$

Менюта-энергия, переданная без совершения работы

Введем уравнение сохранения энергии в дифференциальной форме:



$$\Delta Q^{(+)} = S \Delta t j_x(x)$$

$$\Delta Q^{(-)} = S \Delta t j_x(x+dx)$$

$$dx \rightarrow 0$$

$$j_x(x+dx) = j_x(x) + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx$$

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta Q^{(+)} - \Delta Q^{(-)} = S \Delta t (j_x(x) - j_x(x+dx)) = \\ &= -S \Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \end{aligned}$$

$$\Delta Q = C \Delta t = \rho \Delta m \Delta T \cdot c$$

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S dx$$

$$\Delta Q = c \rho S dx \Delta T = -S dx \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta t$$

$$c \rho \Delta T = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta t$$

$$\frac{c \rho \Delta T}{\Delta t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x} ; \Delta t \rightarrow 0$$

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

$$j_x = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow$$

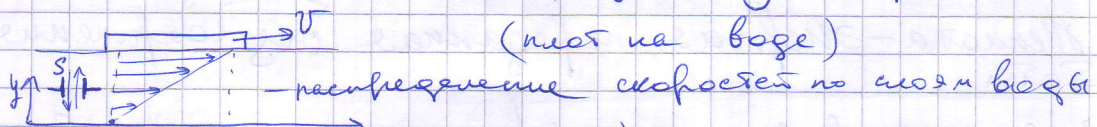
$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{c \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \text{ — уравнение теплопроводности}$$

§ 33. Вязкость жидкости.

Вязкость — свойство жидкости препятствовать движению соприкасающихся с ней тел.

Закон вязкости — плотность потока шипуна пропорциональна градиенту скорости.



Шипуна через площадь S .

$$\frac{\Delta p_x}{S \Delta y} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

η — коэффициент вязкости.

$$\eta = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Пример: $\eta_{\text{вода}} = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}.$

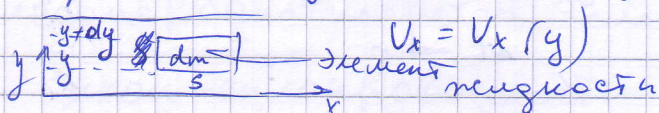
$\frac{F_x}{S}$ — сила, действующая вдоль $ox \Rightarrow$

$$\frac{F_x}{S} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

сдвиговая скорость
напряжение сдвига, измеренное в паскалях.

Закон вязкости: сдвиговое напряжение пропорционально сдвиговой скорости.

Уравнение движения вязкой жидкости.



$$dm = \rho dv = \rho S dy$$

$$F_x(y) = -\int \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$dm \frac{\partial v_x}{\partial t} = F_x(y) - F_x(y+dy)$$

$$dy \rightarrow 0 \Rightarrow$$

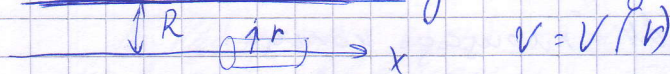
$$F_x(y+dy) = F_x(y) + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow dm \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial F_x}{\partial y} dy = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \int \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) dy =$$

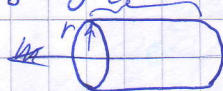
$$= \rho \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy = \underbrace{\rho dy}_{dm} \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} \text{ - уравнение движения элемента жидкости}$$

Пример: течение вязкой жидкости по круглой трубе.



Каждый профиль скорости. Взяв элемент жидкости в виде цилиндра радиуса r и высоты l

 При равномерном течении ~~те~~ жидкости центр масс любого её элемента движется равномерно (сумма сил равна 0)

ΔP - разность давлений на концах элемента

Учтем также силу вязкого трения, действующую на боковую поверхность цилиндра

$$\Delta P \cdot \pi r^2 + \eta \Delta P r l \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{\Delta P r}{2 \eta l}$$

$$dv = - \frac{\Delta P}{2 \eta l} r dr$$

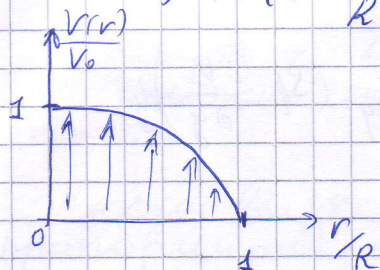
интегрируем.

$$\int_{v_0}^v dv = - \frac{\Delta P}{2 \eta l} \int_0^r r dr \Rightarrow v(r) = v_0 - \frac{\Delta P}{4 \eta l} \cdot \frac{r^2}{2}$$

Будем считать, что $v(R) = 0$.

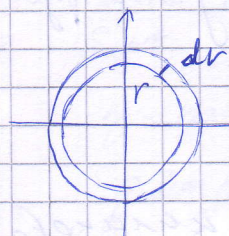
$$v_0 = \frac{\Delta P R^2}{4 \eta l} \text{ скорость движения на оси трубы } (v(r=0) = v_0)$$

$$V(r) = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



Такое распределение скорости — распределение Кузнецова (Кузнецовский профиль).

Условие: t, l, sp, R, t ; $V = ?$



$2\pi r dr$ — площадь кольца

$V(r) \cdot t \cdot 2\pi r dr = dV$ — объем газа, протекающий через кольцо.

$$V = \int dV = t \cdot 2\pi \int_0^R V(r) r dr = t \cdot 2\pi \int_0^R V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr =$$

$$= t \cdot 2\pi \cdot V_0 \cdot R^2 \underbrace{\int_0^1 (1 - x^2) x dx}_{1/4}$$

$$\Rightarrow V = t \cdot 2\pi V_0 R^2 \cdot \frac{1}{4} ;$$

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi}{2} R^2 V_0 \sim R^4$$

§34

Механика деформации твердого тела.
Главная ось деформации.

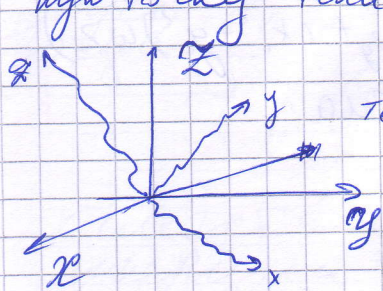
Как описать произвольное движение твердого тела?

1. Движение центра масс:

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_{внешн.}$$

Перейдем к системе отсчета, связанную с центром масс. Ц.м. будет неподвижен $\Rightarrow$ далее рассмотрим движение тела с одной неподвижной точкой.

Введем 2 системы координат: неподвижную (лабораторную) и систему, связанную с телом. Начало обеих систем поместим в неподвижную точку тела.



Положим в основу этой теории теорему моментов:

$$\vec{N} = \vec{M}$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \sum_i \vec{N}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \\ &= \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]. \end{aligned}$$

(63) $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ - формула Эйлера.

Каждому $\vec{\omega}(t)$ - мгновенную угловую скорость вращения тела определяемую как вектор, направленный вдоль мгновенной оси вращения по правилу правого винта; $\vec{\omega} = \dot{\varphi}$

Мгновенная ось вращения - прямая, на которой лежат неподвижные в данный момент точки тела.

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$$

$$\Rightarrow \vec{N}_i = m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\omega}))$$

Сфакторизуем это векторное равенство на оси координат, жестко связанные с телом:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$(\vec{r}_i, \vec{\omega}) = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

$$\vec{N}_i = m_i ((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \vec{\omega} - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \cdot \vec{r}_i)$$

Проектируем:

$$\begin{aligned} N_{ix} &= m_i ((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \omega_x - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \cdot x_i) = \\ &= m_i ((y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z) \end{aligned}$$

Аналогично:

$$N_{iy} = m_i (-y_i \dot{x}_i^2 + (x_i^2 + z_i^2) \omega_y - y_i z_i \omega_z)$$

$$N_{iz} = m_i (-z_i \dot{x}_i^2 - z_i y_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \omega_z)$$

Сложим по всем точкам тела:

$$N_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$N_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$N_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = I_{yx}$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\sum_i m_i z_i x_i$$

$\Rightarrow \vec{N} = \hat{I} \vec{\omega}$ $\hat{I}$ - оператор, тензор инерции.

Момент инерции твердого тела - матрица связывающая между собой компоненты вектора момента импульса и компоненты вектора угловой скорости.

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Момент инерции твердого тела относительно оси определяется, что эти векторы, вообще говоря, не параллельны.

Главные оси инерции тела — оси, в которых тензор инерции становится диагональным.

Пусть x, y, z — главные оси инерции. Тогда:

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$
 — тензор инерции для любого тела (следствие из симметрии тензора инерции)

$$\Rightarrow \{ N_x = J_x \omega_x; N_y = J_y \omega_y; N_z = J_z \omega_z \}$$

Чтобы понять, чем эти оси отличаются физически, рассмотрим частный случай, когда тело вращается вокруг одной из главных осей (J_x)

$$\Rightarrow \omega_x \neq 0; \omega_y = 0; \omega_z = 0$$

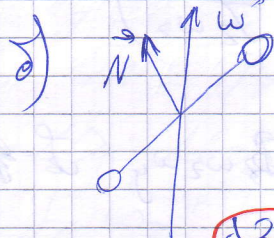
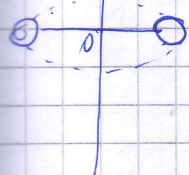
$$\Rightarrow N_x \neq 0; N_y = 0; N_z = 0$$

$\Rightarrow$ векторы N и ω параллельны.

Пример:

а) $\vec{\omega}, \vec{N}$ вращение симметричного тела:

$$\vec{N} = I \vec{\omega} \Rightarrow \vec{N} \parallel \vec{\omega}$$



§35

Динамика твёрдого тела. Уравнения Эйлера.

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}; \text{ (теорема моментов)}$$

$$\vec{N} = \vec{e}_x \cdot N_x + \vec{e}_y N_y + \vec{e}_z N_z.$$

l - система координат, жестко связанная с телом.

$$\dot{\vec{N}} = \dot{\vec{e}}_x \dot{N}_x + \dot{\vec{e}}_y \dot{N}_y + \dot{\vec{e}}_z \dot{N}_z + \underbrace{\vec{e}_x \dot{N}_x + \vec{e}_y \dot{N}_y + \vec{e}_z \dot{N}_z}_{\text{скорость изменения } N \text{ в сист. } l \text{ связан с телом.}}$$

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{N}] (*)$$

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \dot{\vec{r}} \quad (3)$$

В частности эту формулу можно применить для ортов системы координат, связанной с телом.

$$(*) : \dot{\vec{e}}_x = [\vec{\omega}, \vec{e}_x]; \dot{\vec{e}}_y = [\vec{\omega}, \vec{e}_y]; \dot{\vec{e}}_z = [\vec{\omega}, \vec{e}_z]$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{N}} = \frac{dN}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{N}]$$

$$\dot{\vec{N}} = (\dot{\vec{e}}_x \dot{N}_x + \dot{\vec{e}}_y \dot{N}_y + \dot{\vec{e}}_z \dot{N}_z +$$

$$[\vec{\omega}, \vec{N}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$(N_x = J_x \omega_x; N_y = J_y \omega_y; N_z = J_z \omega_z)$$

$$\textcircled{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x \omega_x & J_y \omega_y & J_z \omega_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (J_z \omega_z \omega_y (J_z - J_y)) -$$

$$- \vec{e}_y \omega_x \omega_z (J_z - J_x) + \vec{e}_z \omega_y \omega_x (J_y - J_x)$$

$$\dot{\vec{N}} = \vec{e}_x (J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z) +$$

$$+ \vec{e}_y (J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z) + \vec{e}_z (J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y)$$

Проксифулер на главную ось инерции:

$$\dot{N}_x = M_x; \quad \dot{N}_y = M_y; \quad \dot{N}_z = M_z$$

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = M_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z \end{cases}$$

Данная система - уравнения Эйлера.

x, y, z - главные оси инерции тела;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - проекции мгновенной угловой скорости на эти оси.

I_x, I_y, I_z - главные моменты инерции

M_x, M_y, M_z - суммарные моменты сил.

Пример: свободное вращение симметричного волчка.

Симметричный волчок - тело, у которого x и y 3 главных момента инерции совпадают.

$$I_x = I_y \neq I_z$$

$$I_y - I_x = I_A; \quad I_z = I_B$$

$$M_x = M_y = M_z = 0$$

$$\Rightarrow I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z = 0$$

$$\Rightarrow \omega_z = \omega_{z0} = \text{const.}$$

$$\begin{cases} I_A \dot{\omega}_x + (I_B - I_A) \omega_{z0} \omega_y = 0 \\ I_A \dot{\omega}_y + (I_B - I_A) \omega_{z0} \omega_x = 0 \end{cases}$$

(2.2)

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + 2\omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y - 2\omega_x = 0 \end{cases}$$

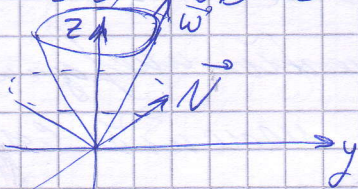
$$\ddot{\omega}_x + 2\dot{\omega}_y = \ddot{\omega}_x + 2\ddot{\omega}_x = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_x(t) = \omega_0 \cos 2t \\ \omega_y(t) = \omega_0 \sin 2t \\ \omega_z(t) = \omega_{z0} = \text{const} \end{cases}$$

$$M_x(t) = J_A \omega_x = J_A \omega_0 \cos 2t$$

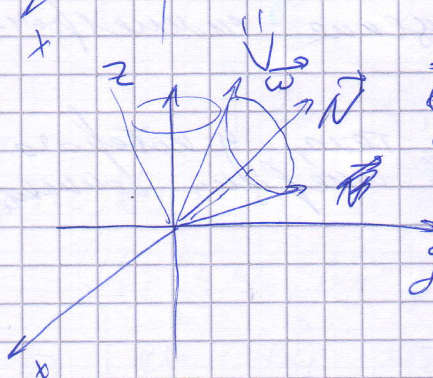
$$M_y(t) = J_A \omega_y = J_A \omega_0 \sin 2t$$

$$M_z(t) = J_B \omega_z = \text{const}$$



в лаб. сист.

$$\vec{N} = M = 0 \Rightarrow N = \text{const}$$



$\Rightarrow$ свободный симметричный волчок движется так, как если бы он был жестко связан с конусом, касающимся деу проецирующиеся по поверхности другого конуса.